0.0.1 Correction entrainement $E3C$ (exercice 12)

Exercice 1. L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. Il peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.
On considère un échantillon d'une population d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation. On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de $8,3\%$. On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
3. Déterminer le nombre de noyaux d'iode 131 présents dans l'échantillon au bout de 5 jours.
4. On considère la fonction Python ci-contre.

```
def iode():
    n=0
    u=10**6
    while u>10**6/2 :
        n=n+1
        u=0,917*u
        return(n)
```

   (a) A quoi correspond la valeur n retournée par cette fonction ?
   (b) Si on exécute cette fonction, quelle valeur obtient-on ?
   (c) Déterminer à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitié. *Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode* 131.
5. Pour le césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de $2,3\%$. Quelles modifications faut-il apporter à la fonction précédente pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population de départ est de 10^8 noyaux.

Correction :

Le texte mentionne une diminution de $8,3\%$, implicitement cela signifie qu'il faudra employer le coefficient multiplicateur $1 - 0,083 = 0,917$ dans ce qui va suivre.

1. D'après la remarque précédente, nous avons $u_1 = 0,917 \times u_0 = 0,917 \times 10^6 = 917\,000$ et $u_2 = 0,917 u_1 = 840\,889$.
2. D'après les calculs effectués dans la question précédente, pour obtenir u_{n+1}, il suffit de multiplier le nombre de noyaux du jours précédent u_n par $0,917$. Autrement dits, nous avons
$$u_{n+1} = 0,917 \times u_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$
3. La question précédente nous assure que u_n est une suite géométrique de raison $q = 0,917$. D'après le cours, sa forme explicite est donc $u_n = u_0 \times q^n = 10^6 \times (0,917)^n$. Pour répondre à la question, il suffit alors de calculer u_5 :
$$u_5 = 10^6 \times (0,917)^5 = 648405,5.$$

4. Pour mieux comprendre ce programme, décrivons-le ligne par ligne.

    - La 1ère ligne correspond au nom de la fonction, ici *iode*.
    - La 2ième ligne correspond à la première valeur pouvant être choisie pour n.
    - La 3ième ligne correspond à $u_0 = 10^6$, le nombre de noyaux d'iode présents initialement.
    - La 4ième ligne correspond à une condition de type *tant que* : tant que la suite u_n (représentée par la lettre u dans le programme) se trouve au dessus de la valeur $10^6/2$, le programme effectue les deux lignes de codes inscrites en dessous.
    - La 5ième ligne correspond à la première instruction effectuée par le programme (tant que la condition *while* est vérifiée). Cette instruction augmente la valeur du compteur n : à chaque étape n est remplacé par $n+1$.

      Par exemple, au début du programme, $n = 0$ et $u_0 = 10^6$, puisque $u_0 > \frac{10^6}{2}$ $n = 0$ est remplacée par la valeur $n = 0+1 = 1$. Ensuite, puisque $u_1 = 917\,000 > u_0 > \frac{10^6}{2}$ $n = 1$ est remplacé par la valeur $n = 1+1 = 2$ et ainsi de suite.

    - Cette 6ième ligne correspond à la formule de récurrence

      $$u_{n+1} = 0,917u_n$$

      Tant que la condition *while* est vérifiée, l'algorithme calcule de proche en proche les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

      Par exemple, comme nous l'avons vu, $u_0 > \frac{10^6}{2}$ donc le programme calcule ensuite le terme suivant u_1 à l'aide la relation de récurrence. Il constante ensuite que $u_2 > \frac{10^6}{2}$, il recommence alors l'opération : il remplace la valeur de u par celle u_3 (qui est obtenue grâce à la relation de récurrence).
    - Cette dernière ligne permet de renvoyer le premier indice n tel que $u_n \leq \frac{10^6}{2}$. C'est l'intérêt du programme.
5. Nous venons de répondre à cette question dans la ligne précédente.
6. Si on exécute le programme, nous obtenons la valeur 8. En effet, $u_7 = 545\,237$ et $u_8 = 499\,982,4$. Il s'agit bien du premier indice à partir du quel $u_n \leq \frac{10^6}{2}$.
7. Le temps de demi-vie correspond au premier instant à partir duquel la moitié des noyaux initialement présent ont disparu. Autrement dit, dans le cas de l'iode, il s'agit du premier indice n tel que $u_n \leq \frac{10^6}{2}$. D'après ce qui précède, nous observons que cela se produit entre le 7ième et 8ième jour.

   Remarque : il est possible d'implémenter ce genre d'algorithme directement sur votre calculatrice. Voici un exemple `https://www.youtube.com/watch?v=Kza3KBjjsM0` sur lequel on cherche à savoir à partir de quelle moment une suite dépasse un seuil donné.
8. Pour répondre à cette dernière question, il suffit de modifier la valeur de la raison $0,917$ par $q = 1 - 0,023 = 0,977$ (coefficient diminution de $2,3\%$) et de modifier la valeur de u_0 par 10^8.