0.0.1 Correction des exercices 7, 6 et 8

Dans l'exercice suivant, l'idée essentielle est d'utiliser la propriété :

$$e^x = e^y \quad\Longleftrightarrow\quad x = y.$$

Exercice 1 (Exercice 7). Comme annoncé ci-dessous, nous allons devoir utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle afin de se ramener à une équation de la forme $e^x = e^y$.

1. l'équation $e^{3x} = 0$ n'a aucune solution car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Puisque $e^0 = 1$,
$$e^{2x} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{2x} = e^0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 0.$$
3. l'équation $e^x = -3$ n'a aucune solution car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. $$e^{-3x+6} = e \quad\Longleftrightarrow\quad e^{-3x+6} = e^1 \quad\Longleftrightarrow\quad -3x+6 = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{5}{3}.$$
5. Il faut d'abord se ramener à un produit nul en factorisant par e^{-x} (facteur commun) :
$$4e^{-x} + 7xe^{-x} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{-x}(4+7x) = 0$$
Deux cas de figures s'offrent à nous :
   (a) soit $e{-}x = 0$ (ce qui est impossible puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
   (b) soit $4 + 7x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = -\frac{7}{4}$.

   En résumé, nous avons
$$4e^{-x} + 7xe^{-x} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = -\frac{7}{4}.$$
6. Il convient d'abord de se « débarrasser » du dénominateur :
$$\frac{5e^x - 3}{e^x + 1} = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 5e^x - 3 = e^x + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4e^x = 4 \quad\Longleftrightarrow\quad e^x = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad e^x = e^0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 0.$$

Exercice 2 (Exercice 6). Dans cette exercice, il faut d'abord se ramener à un produit (en factorisant) avant d'étudier le signe. Il est essentiel de retenir que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. $A = 10e^x - 5xe^x = 5e^x(2-x)$. Puisque $5e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de A est déterminé par celui de $(2-x)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $5e^x$		$+$		$+$	
signe de $2-x$		$+$	0	$-$	
A		$+$	0	$-$	

2. $B = 2xe^{-x} + 3e^{-x} = e^{-x}(2x+3)$. Puisque $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de B est déterminé par celui de $(2x+3)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de e^{-x}		$+$		$+$	
signe de $2x+3$		$-$	0	$+$	
B		$-$	0	$+$	

3. $C = e^{2x} - 4e^x = e^x(e^x - 4)$. Puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de A est déterminé par celui de $e^x - 4$. L'étude du signe de $e^x - 4$ ne peut-être faite en classe de 1ère car elle nécessite l'utilisation de la fonction logarithme $x \mapsto \ln x$.
4. Il suffit d'utiliser l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ pour factoriser. En effet,

$$D = e^{2x} + 2e^x + 1 = (e^x)^2 + 2 \times e^x \times 1 + 1 = (e^x + 1)^2 > 0$$

   puisque $e^x + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Il suffit d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ pour factoriser. En effet,

$$E = e^{2x} - 16 = (e^x)^2 - 4^2 = (e^x + 4)(e^x - 4).$$

   Puisque $e^x + 4 > 4 > 0$, le signe de E est déterminé par celui de $e^x - 4$. Comment expliqué précédemment, il n'est pas possible de résoudre cette question en classe de 1ère.

Exercice 3 (Exercice 8). 1. L'équation (E) s'écrit $(e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0$. Ainsi, puisque $X = e^x$, nous avons la formulation équivalente

$$(E') : \quad X^2 + 2X - 3 = 0$$

2. Pour résoudre (E'), il suffit d'utiliser $\Delta = 16 > 0$. Il existe donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

3. Pour conclure, il suffit de revenir à la variable x. Il faut donc résoudre les équations

$$e^x = 1 \quad \text{et} \quad e^x = -3.$$

   La deuxième équation n'a pas de solution puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La première solution admet une unique solution $x_1 = 0$. En résumé, (E) admet une unique solution : $x_1 = 0$.