Chapitre 1

Ensembles de nombres

En mathématiques nous sommes confrontés à de nombreux ensembles qui regroupent des objets de même nature. Les plus simples d'entres eux sont des ensembles de nombres. Nous allons étudier certaines propriétés de ces derniers dans ce chapitre.

Comme nous allons le constater certains nombres apparaissent naturellement dans la vie de tous les jours (notamment lorsqu'il s'agit de dénombrer des quantités diverses et variées). Pourtant la construction historique (d'un point de vue mathématique) de ces ensembles n'est pas forcément celle que l'on imagine.

1.1 Nombres entiers

Les nombres les plus simples à manipuler sont les nombres entiers. Ils apparaissent naturellement dès lors que l'on souhaite énumérer des quantités (un troupeau de bêtes par exemple).

Définition 1.1.1. *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs. Autrement dit,*

$$\mathbb{N} = \{0 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 100 \quad ; \quad \dots\}$$

Remarque. Les nombres entiers sont connus depuis Euclide (environ 300 av. J.C.), la notation $\mathbb{N}$ est introduite par Peano en 1894 et sa construction formelle a été établie (de manière indépendante) par Peano et Dedekind à la fin du $19^{ème}$ siècle.

Il peut être commode de trouver une notation indiquant le défaut d'une quantité. Par exemple, dans le commerce, lorsqu'un marchand doit de l'argent à quelqu'un.

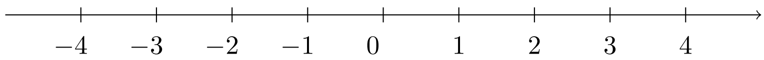
Définition 1.1.2. *L'ensemble des entiers relatifs* $\mathbb{Z}$ *désigne l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs. Autrement dit,*

$$\mathbb{Z} = \{\dots \quad ; \quad -100 \quad ; \quad -4 \quad ; \quad -3 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 0 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 2 \quad \dots \quad ; \quad 100 \quad ; \quad \dots\}$$

Remarque. En particulier, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ceci signifie que tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont également des éléments de $\mathbb{Z}$. L'inclusion réciproque n'est pas vérifiée : en effet, $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $-2 \notin \mathbb{Z}$. Nous étudierons la propriétés de ces deux ensembles plus en détails durant l'année.

Les nombres entiers relatifs (les entiers possédant éventuellement un signe « $-$ ») apparaissent dans des textes du mathématiciens indien Ârybhata ($476-550$) : ils permettent de traiter la notion de dettes et de recettes. Ces nombres sont également présents dans les écrits du perse Abu I-Wafa ($940-998$) ; en revanche, il faut attendre les travaux de Stevin ($1548-1620$) pour qu'ils apparaisent en Europe. La construction formelle de cette ensemble est de nouveau obtenue par Dedekind ($1831-1916$) et la notation $\mathbb{Z}$ (du mot allemand *Zahlen* signifiant *chiffre*) est popularisée par le mathématicien polycéphale Bourbaki (né en 1935).

Ces deux ensembles ($\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$) peuvent se représenter sur un axe gradué infini (le lecteur prolongera mentalement cette droite) :



Nous allons maintenant voir quels nombres se trouvent entre chaque graduation.

1.2 Nombres fractionnaires

D'autres nombres apparaissent naturellement dans la vie de tous les jours, il s'agit des nombres fractionnaires. Ces derniers sont obtenus lorsque des proportions d'un quantité donnée est mise en jeu (le tiers d'un gâteau, une demi-heure, etc). Ces ensembles contiennent les ensembles d'entiers introduits plus tôt.

1.2.1 Nombres décimaux $\mathbb{D}$

Les nombres décimaux apparaissent naturellement lorsque l'on prend des mesures (la longueur de cette feuille mesure $20,2$ cm, cette balle pèse $1,67$ gramme, etc). Voici d'autres nombres du même genre.

Exemple 1.2.1.

$$-1,0 \quad ; \quad 20,23 \quad ; \quad 345,89745 \quad ; \quad \frac{435}{10^2} = \frac{435}{100} = 4,35$$

ou encore

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \quad ; \quad 10^{-4} = 0,0001$$

De manière générale, tout ces nombres peuvent s'écrire comme le quotient d'un nombre entier et d'une puissance de 10. Par exemple,

$$20,23 = \frac{2023}{100} = \frac{2023}{10^2}.$$

Définition 1.2.1. *L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ est composé de nombres de la forme*

$$\frac{a}{10^n} \quad \textit{avec} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \textit{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque. Bien entendu, tout nombre entier est un nombre décimal : i.e. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Il est important d'observer et de retenir que tout nombre décimal admet un développement décimal avec un **nombre fini de chiffres après la virgule.** C'est de cette manière qu'il est possible de les caractériser.

Exemple 1.2.2. Voici quelques exemples permettant d'illustrer cette propriété :

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad ; \quad -\frac{3}{25} = -0,12 \quad ; \quad \frac{217}{125} = 1,736$$

1.2.2 Nombres rationnels

Voici un deuxième ensemble de fractions, plus général. Celui-ci apparait naturellement dans de nombreuses situation du quotidien : imaginons qu'un groupe de 3 amis souhaite partager un gâteau en 3 part égales, cela force à découper le gâteau en tiers : i.e. il faut déterminer $\frac{1}{3}$ du gâteau.

Définition 1.2.2. *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est composé de nombre de la forme*

$$\frac{a}{b} \quad \textit{avec} \quad a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}_*$$

Remarque. Notons que $\mathbb{Q}$ contient tout les autres ensembles déjà décrits (i.e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) . Comme nous le verrons l'inclusion réciproque est fausse. Autrement dit, nous allons pouvoir trouver des nombres appartenant à $\mathbb{Q}$ qui ne sont ni des décimaux, ni des entiers.

La notion de fraction est déjà présente dans des papyrus égyptiens (notamment le papyrus *Rhind* datant de -1650 av. J.C.) mais leur véritable construction mathématique date des travaux de Peano en 1895; il choisit la lettre $\mathbb{Q}$ (de l'italien *quoziente* signifiant *quotient*) pour désigner de tels nombres.

Voyons quelques exemples de nombres rationnels.

Exemple 1.2.3. 1. $\frac{1}{3} = 0,\mathbf{3}3333\ldots \in \mathbb{Q}$ car $\frac{1}{3} = \frac{a}{b}$ avec $a = 1 \in \mathbb{Z}$ et $b = 3 \in \mathbb{Z}_*$.

2. $\frac{14}{-21} \in \mathbb{Q}$ en choisissant $a = 14$ et $b = 21$. Notons que cette fraction peut-être simplifiée :

$$\frac{14}{-21} = \frac{2 \times 7}{-3 \times 7} = -\frac{2}{3}$$

3. $6 \in \mathbb{Q}$ car $6 = \frac{6}{1}$.
4. $\frac{2,3}{0,7} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{2,3}{0,7} = \frac{2,3}{0,27} \times \frac{100}{100} = \frac{230}{27}$.

Comme nous l'avons vu, les nombres décimaux admettent toujours un nombre fini de chiffres après la virgule. L'ensemble des nombres rationnels étant plus grand, nous pouvons à présent considérer des nombres ayant une infinité de chiffres après la virgule. Seulement cette infinité de chiffres doit respecteur **une condition** que nous allons détailler ci-dessous, après un exemple.

Exemple 1.2.4. 1. Le nombre $\frac{107}{22} \in \mathbb{Q}$. Voyons ce que l'on peut dire de son écriture décimale (en effectuant la division 107 par 22). Nous trouvons

$$\frac{107}{22} = 4,86363636363\ldots$$

Puisqu'il y a une infinité de chiffres après la virgule, il ne s'agit pas d'un nombre décimal. Cependant, nous pouvons constater qu'un motif se répète :

$$4,8\,63\,63\,63\ldots$$

les valeurs 63 se répètent de manière infinie, il s'agit de la **période** du nombre.

2. $\frac{13\,193}{49\,950} = 0,26\,412\,412\,412\ldots$, ici la période vaut 412.

Proposition 1. *Tous éléments de $\mathbb{Q}$ vérifient l'un des points suivants :*

- *soit il s'agit d'un nombre entier,*
- *soit c'est un nombre qui possède un **nombre fini de chiffres après la virgule** (c'est un nombre décimal)*
- *soit c'est un nombre qui possède une **période** de nombres qui **se répète indéfiniment** après la virgule ; ce n'est donc pas un nombre décimal mais un nombre rationnel.*

Il convient à présent de déterminer la nature d'un nombre à partir de ce que nous venons de voir.

Exercices à traiter : 28 page 26 (éventuellement 13,14,20,25 page 26).

Régulièrement dans l'année nous allons faire des démonstrations. Il s'agit de proposer une série d'arguments mathématiques afin de justifier qu'une propriété est vérifiée (par exemple). Voyons sur un exemple.

Exemple 1.2.5. Observons que

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots$$

Ce nombre admet une période (le chiffre 3) qui se répète de manière infinie après la virgule. D'après ce que nous avons vu, il s'agit d'un élément de $\mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$. Comment justifier rigoureusement cela ?

Avant toutes choses, il est important de noter certains faits.

Définition 1.2.3. *Tous les nombres divisibles par 3 peuvent s'écrire de la façon suivante :*

$$3a \quad \textit{avec} \quad a \in \mathbb{Z} \tag{1.2.1}$$

Exemple 1.2.6. Il suffit de prendre quelques exemples pour s'en convaincre :

$$3 = 3 \times 1 \quad ; \quad 27 = 3 \times 9 \quad ; \quad \ldots$$

En revanche, 5 n'est pas divisible par 3 car il n'est pas possible d'exprimer 5 sous la forme $5 = 3a$ avec $a \in \mathbb{Z}$ (ici, il est essentiel que a soit un entier relatif).

Rappelons également qu'un critère de divisibilité a été vu au collège.

Proposition 2. *[Critère divisibilité] Un nombre est divisible par* 3 *si la somme des chiffres qui le compose est divisible par* 3*.*

Exemple 1.2.7. Par exemple, 27 est divisible par 3 car $2+7=9$ est divisible par 3 ; 25 n'est pas divisible par 3 car 3 ne divise pas $2+5=7$.

Nous pouvons à présent nous attaquer à la démonstration du résultat suivant.

Proposition 3. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ *mais* $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$*.*

Démonstration. La démonstration de ceci se fait par **l'absurde** : nous allons **supposer le contraire** de ce que nous souhaitons démontrer (i.e. $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$) afin **d'aboutir à une contradiction**. Cette contradiction signifiera que notre hypothèse de base n'est pas possible.

Supposons donc, par l'absurde, que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Par définition de cet ensemble, cela signifie qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$$

Nous allons voir que cette identité va nous amener à une contradiction (et cela n'est pas gênant de ne pas connaitre la valeur de a ou de n). Pour cela, il suffit d'observer que cette identité peut s'écrire sous la forme

$$10^n = 3a.$$

Ainsi, 10^n est un multiple de 3 (par définition, cf. 1.2.1), ceci est absurde car la somme des chiffres composant 10^n (ce nombre n'est rien d'autre que 1 suivit de n zéros) vaut 1 qui n'est pas divisible par 3 (cf. proposition 2) □

Maintenant que nous avons donné un nom aux nombres (les décimaux et les rationnels) qui se trouvent entre chaque graduation entière de notre axe, nous allons voir qu'il en existe encore d'autres.

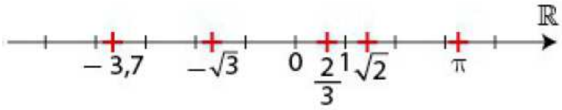
1.3 Nombres réels

Voyons enfin un dernier ensemble, plus grand encore : celui des nombres réels. Intuitivement, il contient tous les nombres que nous pouvons rencontrer dans la vie de tous les jours. Il est donc composé de tous les entiers, de toutes les fractions mais aussi de tous les autres nombres qu'il n'est pas possible d'exprimer sous la forme d'une fraction ou d'un nombre entier (certains racines carrées par exemple).

Définition 1.3.1. *L'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *est composé de tous les nombres usuels :*

$$\mathbb{R} = \{\ldots \quad ; \quad \pi \quad ; \quad \sqrt{2} \quad ; \quad -4 \quad ; \quad \frac{45}{7} \quad ; \quad 0,234 \quad ; \quad 4372 \quad \ldots\}$$

Remarque. 1. Il est souvent utile de représenter cet ensemble de nombre graphiquement à l'aide d'une droite graduée. Dans ce cas, il est alors possible d'associer à un nombre réel à tout point M de cette droite graduée. Ce nombre est appelé abscisse du point M.



2. Certains nombres comme π ou $\sqrt{2}$ ne peuvent s'exprimer comme des fractions, l'ensemble $\mathbb{R}$ contenant ces nombres n'a été inventé qu'à la fin du 19ième siècle par les mathématiciens Cantor et Dedekind. En particulier, $\pi \in \mathbb{R}$ **et** $\pi \notin \mathbb{Q}$**, nous dirons que** π **est irrationnel**.
3. Grossièrement un nombre réel ($\sqrt{2}$ par exemple) est soit un nombre rationnel (dans $\mathbb{Q}$) ou bien un nombre dont l'écriture décimale est composée d'une infinité de chiffres après la virgule **sans motif** périodique ; de manière générale, les nombres se trouvant dans $\mathbb{R}$ mais **pas** dans $\mathbb{Q}$ sont appelés nombres **irrationnels**.

Comme nous l'avons fait remarquer plus tôt, les inclusions suivantes sont vérifiées

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Bien entendu, il existe encore de nombreux ensembles en mathématiques mais il faudra patienter encore pour les étudier. En attendant revenons sur une question historique qui a longtemps embêtée l'école Pythagoricienne. Pendant longtemps, les élèves de Pythagore étaient persuadés que toute longueur pouvant être dessinée devait aussi s'écrire comme un nombre rationnel

$$\text{i.e. sous la forme d'une fraction } \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Ils furent bien ennuyé face à l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1. En effet, d'après le théorème de Pythagore l'hypoténuse mesure $\sqrt{2}$ et comme nous allons le voir $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (cela sera traité dans un D.M.) .

Proposition 4. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. Cf. D.M. (donné dans le chapitre d'arithmétique) □

Voyons un bref résumé de ce que nous venons de voir grâce à la vidéo suivante :
https://www.arte.tv/fr/videos/097454-009-A/voyages-au-pays-des-maths/.
Il convient à présent de savoir déterminer la nature d'un nombre.

Exercices à traiter : 42 et 43 page 27.

1.4 Encadrement par des nombres décimaux

Il n'est pas possible d'écrire $\sqrt{2}$ sous forme décimale de manière exacte. Afin d'estimer ce nombre, il est alors pratique de trouver un encadrement de celui-ci à l'aide de nombres décimaux (qui sont plus simples à manipuler).

Définition 1.4.1. *Un encadrement décimal d'un nombre réel x est une* ***inégalité*** *de la forme*

$$d_1 \leq x \leq d_2 \quad \text{avec} \quad d_1, d_2 \in \mathbb{D}.$$

La différence $d_2 - d_1$ correspond à ***l'amplitude*** *de l'encadrement.*

Exemple 1.4.1. Il est évident que $1,4 < \sqrt{2} \approx 1,414\ldots < 1,5$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude $1,5 - 1,4 = 0,1 = 10^{-1}$.

D'une certaine manière, trouver un encadrement d'un nombre revient à faire des arrondis (à l'inférieur ou au supérieur) d'un nombre en ne conservant qu'un certain nombre de chiffres après la virgule. Voyons sur quelques exemples.

Exemple 1.4.2. 1. Puisque nous avons l'encadrement

$$3,14 \leq \pi \approx 3,14159\ldots \leq 3,15.$$

L'arrondi au centième (deux chiffres après la virgule) de π vaut $3,14$.

2. Puisque nous avons l'encadrement

$$1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$$

donc l'arrondi à 10^{-3} (au millième, c'est-à-dire avec 3 chiffres après la virgule) de $\sqrt{2}$ vaut $1,414$.

Exercices à traiter : 34 page 27 et 44 page 28.

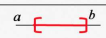
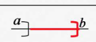
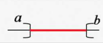
1.5 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Il est parfois utile d'étudier des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, c'est à dire une collection de nombre réels. Cette partie est essentielle pour le reste de l'année et celles qui suivront.

1.5.1 Les intervalles

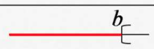
Lorsque nous étudierons des fonctions, nous aurons à considérer des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$ appelés *intervalles*. Il peut s'agir de segments, de demi-droites ou encore de la droite des réels toute entière. Un point important est que ces ensembles n'ont pas de « trous » et sont d'un seul « tenant ». Voici de quelle manière de tels ensembles sont notés.

Débutons par les segments. Ces derniers (coloriés en rouge) consiste en l'ensemble des nombres réels compris entre deux valeurs a et b

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	

Remarque. Il faut prendre garde dans quel sens les symboles [et] sont placés. Si le crochet est tourné vers « **l'interieur** », cela signifie que l'extrémité du segment est **incluse** dans l'ensemble ; au contraire, si le crochet est tourné vers « **l'extérieur** », cela signifie que l'extrémité du segment est **exclue**. Cette remarque restera valable dans le cas des demi-droites.

Voyons à présent le cas des demi-droites :

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

Remarque. Attention au fait suivant : les symboles $\pm\infty$ ne sont pas des nombres réels et, au lycée, le crochet se trouvant à côté de ce symbole est toujours **ouvert** (pour exclure cette valeur). Notons au passage que $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

Par la suite, il sera important de savoir passer d'une notation à l'autre (inégalités, expression avec des crochets, dessins).

Exercices à traiter : 52, 53,54, 58,59, 60 et 61 pages 28-29.

L'infini est une notion mathématique délicate, voyons cela grâce à la vidéo suivante :

https://www.arte.tv/fr/videos/097454-005-A/voyages-au-pays-des-maths/.

1.6 Valeur absolue

La valeur absolue est une nouvelle fonction qui permet de mesure la distances entre deux points, elle est également utile pour obtenir une représentation alternative de certains intervalles.

Définition 1.6.1. *La valeur absolue d'une nombre réel x est définie comme suit :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Voyons sur quelques exemples.

Exemple 1.6.1.
1. $|7| = 7$ car $7 \geq 0$ alors que $|-2,3| = -(-2,3) = 2,3$ car $-2,3 \leq 0$.
2. $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$ car $1 < \sqrt{2} \equiv 1,414\ldots$ donc $1-\sqrt{2} < 0$, pour calculer la valeur absolue nous devons prendre l'opposé de $1-\sqrt{2}$.
3. $|1+\pi| = 1+\pi$ car $1+\pi > 0$.

Voici quelques propriétés satisfaites par la valeur absolue.

Proposition 5. *Dans ce qui suit $a, b \in \mathbb{R}$*

1. $|a| \geq 0$, $|a| = |-a|$ *et* $|a|^2 = a^2$.
2. $|a-b| = |b-a|$ *et* $|ab| = |a| \times |b|$
3. *(Inégalité triangulaire)* $|a-b| \leq |a| + |b|$

La définition de distance ci-dessous en terme de valeur absolue, permet d'interpréter certaines des assertions de la proposition précédentes. La distance entre deux points a et b est définie comme suit.

Définition 1.6.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ alors la distance $d(a;b)$ entre a et b est définie par*

$$d(a;b) = |a-b|.$$

Remarque. En particulier, $|a| = d(0;a)$. De plus, le fait que $|a-b| = |b-a|$ peut s'interpréter géométriquement en disant que la distance entre a et b est la même que celle entre b et a.

1.6.1 Représentation alternative des intervalles

Pour que cela soit moins abstrait, nous allons voir qu'il est possible de relier cette notion de distance avec les intervalles.

Exemple 1.6.2. L'ensemble

$$x \in [-2;4]$$

peut s'exprimer à l'aide d'une valeur absolue. Pour cela, il suffit de trouver le milieu du segment $[-2;4]$ pour ensuite déterminer quelle distance sépare celui-ci des extrémités.

1. le milieu du segment vaut $\frac{-2+4}{2} = 1$ et $d(1;4) = d(1;4) = |1-4| = |-3| = 3$. En résumé, l'intervalle $[-2;4]$ est composé de tous les nombres réels se trouvant au plus à une distance 3 de 1. Autrement dit,

$$x \in [-2;4] \quad \Longleftrightarrow \quad d(x;1) \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| \leq 3$$

Bien entendu, il est possible de procéder de même dans d'autres situations.

Exemple 1.6.3.

1. En reprenant les arguments précédents, nous trouvons que $x \in]4;8[$ correspond à l'ensemble des x se trouvant à une distance au plus (strictement) 6 de 2. Autrement dit,

$$x \in]4;8[\quad \Longleftrightarrow \quad d(x;2) < 6 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-2| < 6.$$

2. En poursuivant notre raisonnement, il est possible de considérer un cas plus complexe : $x \in]-\infty;-4] \cup [8;+\infty[$. Pour cela, il suffit de déterminer le milieu (ici, il vaut 2) du segment $[-4;8]$ puis de regarder à quelle distance ce point se trouve des extrémités des demi-droites :

$$d(2;-4) = d(2;8) = |2-8| = 6.$$

L'ensemble qui nous intéresse correspond donc à tout les réels x se trouvant **au moins** à une distance 6 du point 2 :

$$x \in]-\infty;-4] \cup [8;+\infty[\quad \Longleftrightarrow \quad d(x,2) > 6 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-2| > 6.$$

Il est important d'être capable de faire la démarche inverse : trouver l'ensemble de départ à partir de son expression impliquant une valeur absolue.

Exemple 1.6.4. 1. L'ensemble des réels x tels que

$$|x-4| \leq 3$$

correspond à l'ensemble des nombres se trouvant à une distance au plus 3 du nombre 2. Autrement dit,

$$|x-4| \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [1;7].$$

puisque les points autorisés les plus éloignés de 4 sont forcément $4-3=7$ et $4+3=7$.

2. Dans le même esprit,

$$|x-2| > 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\infty;-3] \cup [7;+\infty[.$$

Formellement, tout ce qui précède est résumé dans la proposition suivante.

Proposition 6. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, nous avons les relations suivantes*

1. *l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x-a| < r$ désigne l'ensemble des nombres réels compris entre $]a-r;a+r[$.*

2. *l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x-a| \geq r$ désigne l'ensemble des réels $]-\infty, a-r[\cup]a+r;+\infty[$.*

Ces nouvelles notions peuvent aussi intervenir de la manière suivante.

Exemple 1.6.5. Résoudre $|x-3| = 2 \quad \Longleftrightarrow d(x;3) = 2$ signifie que nous cherchons l'ensemble des nombres x se trouvant à une distance de 2 du point 3. Un petit dessin permet de trouver que dans ce cas $x = 5$ ou $x = -1$.

Remarque. Mise en garde : l'équation $|x+2| = 4$ peut s'écrire sous la forme $|x-(-2)| = 4$. Il faut donc trouver l'ensemble des nombres se trouvant à une distance de 4 du point -2.

Exercices à traiter : 72, 75, 76 page 29.

1.7 Pour aller plus loin

Certaines questions liées à la théorie des ensembles sont extrêmement complexes. Dans leur quête de formalisme, les mathématiciens ont cherché à trouver une liste d'axiome permettant de construire toute la théorie mathématiques (ensemble, fonctions, équations, géométrie, etc) à partir de cette liste en utilisant uniquement des raisonnements logico-déductifs. En faisant ainsi, il voulait aussi s'assurer que les mathématiques étaient bien quelque chose de cohérents. En effet, puisque toutes les propriétés que vous avez pu rencontrées dans votre scolarité servent à démontrer que d'autres résultats sont vrais, il serait bien embêtant que le socle d'un tel édifice (les axiomes) soit bancal et compromette toute la structure. il s'agit en tout cas de l'un des célèbres problèmes énoncés par Hilbert en 1900 lors du deuxième congrès international des mathématiciens.

Malheureusement, en 1931 Gödel démontra un théorème d'incomplétude qui peut se résumer comme suit : à partir de toute liste d'axiome raisonnable (permettant de faire de l'arithmétique, de la géométrie, ...) il est possible de trouver un énoncé mathématique *indécidable*. Autrement dit, il existe un problème mathématique pour lequel il n'est pas possible de démontrer ou réfuter sa véracité.

Voici un autre problème, moins vertigineux, survenant en théorie des ensembles. Il s'agit du paradoxe de Russel qui a été découvert par le mathématicien éponyme en 1901. Il propose le contexte suivant : *supposons que dans une ville, le barbier ne rase que les hommes qui ne se rasent pas mêmes* et posa la question suivante

« *qui doit raser le barbier ?* »

Un petit raisonnement par l'absurde, montre que le barbier ne peux exister sans quoi nous aurions une contradiction.

https://www.youtube.com/watch?v=o79bss3Hc60.

1.8 Liste d'exercices potentiels supplémentaires

- savoir à quel ensemble un nombre appartient : exercices $13-15, 18, 26, 28$ page 26.
- Droite graduée et ensemble de nombres : exercice 43 page 27 (placer ces nombres sur un droite après avoir compléter le tableau).
- arrondi et encadrement : exercices 45 page 28. Exercice 49 page 28 en DM.
- Intervalles : exercices $56, 57, 59, 61$ page 28/29. Imposer les trois écritures à chaque fois.
- Distances : exercices $67, 72, 75, 76$ page 29.

Les exercices suivants peuvent également être fait pour s'entrainer : 36 page 27, 42 page 27, $50, 51, 55, 58$ page 28, $73, 74$ page 29.

1.9 Bilan du chapitre

A l'issue de ce chapitre, il est essentiel de savoir :

- Utiliser des résultats vus au collège (théorèmes de Thalès et Pythagore, ...)
- Représenter graphiquement un intervalle et savoir déterminer une manière littérale de le représenter.