

D.M. 2 à rendre (en binôme) pour le lundi 27/11

Exercice 1. L'objectif de ce DM est d'établir un critère de divisibilité par 11. Pour tout $n \geq 1$, nous adopterons la notation suivante :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \quad \text{avec } a_n \neq 0$$

pour désigner le nombre $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$.

1. Justifier que $10 \equiv -1 [11]$.
2. En déduire que :

$$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n [11].$$

3. Énoncer un critère de divisibilité d'un nombre entier naturel non nul par 11.
4. À l'aide de ce critère, démontrer que 1 370 259 est divisible par 11.

Exercice 2 (Facultatif). Cet exercice a pour objectif de vous faire découvrir la notion de *loi de composition interne* dans un ensemble E (non vide). Cette notion est expliquée page 82 de votre ouvrage (cf. définition et l'exemple).

1. Grâce à vos connaissances du lycée, donner un exemple (autres que ceux présentés page 82) d'ensemble E muni d'une loi de composition interne.
2. Résoudre l'exercice 2 page 82.
3. Résoudre l'exercice 4 page 82.
4. Nous munissons $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'une opération \diamond définie par

$$(x; y) \diamond (x', y') = (xx'; xy' + x'y) \quad \text{pour tout } (x; y) \in E \quad \text{et } (x'; y') \in E.$$

- (a) Démontrer que \diamond est une loi de composition interne sur E .
- (b) Montrer que la loi \diamond est commutative.
- (c) Est-elle associative? Justifier votre réponse.
- (d) Déterminer $(e_1, e_2) \in E$ tel que pour tout $(x; y) \in E$

$$(e_1; e_2) \diamond (x; y) = (x; y) \diamond (e_1; e_2) = (x; y) \quad ?$$

Un tel élément est appelé *élément neutre de E* pour la loi \diamond .