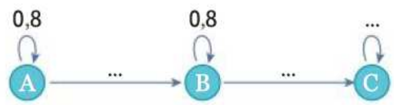
DM n°7 à rendre (en binôme) pour le 27/05

Même si cela n'est pas dit explicitement dans la consigne d'un exercice, toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. Nous modélisons l'attente dans une file par le graphe probabiliste ci-dessous :



A son arrivée, le client se trouve en A. Quand il avance, il passe d'abord en B, puis en C où il est pris en charge. Chaque minute, il a une probabilité égale à 0.8 de rester en A ou en B.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la matrice ligne $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ répresente l'état probabiliste (i.e. la loi de X_n, la chaîne de Markov sous-jacente, à l'instant n) au bout de n minutes d'attente. Ainsi, a_n, b_n et c_n désignent les probabilités d'être respectivement en A, en B et en C, n minutes après l'arrivée dans la file d'attente.

1. Déterminer P la matrice de transition associée à ce graphe probabiliste.
2. Déterminer la loi initiale π_0
3. (a) Vérifier que $\pi_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une mesure de probabilité invariante pour $(X_n)_{n \geq 0}$.
   (b) Vérifier que π_* est l'unique mesure de probabilité invariante de la chaîne. *Indication : considérer $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ une mesure de probabilité (i.e. $a + b + c = 1$) invariante et montrer que nécessairement $\pi = \pi_*$.*
4. Quel est l'attente minimale d'un client ?
5. Considérons les deux matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}_*$, D^n.
   (b) Calculer N^2 puis N^3.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P^n = \begin{pmatrix} 0.8^n & 0.2 \times 0.8^{n-1} \times n & 0.02 \times 0.8^{n-2} \times n(n-1) \\ 0 & 0.8^n & 0.2 \times 0.8^{n-1} \times n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Indication : nous rappelons que si A et B sont deux matrices carrées telles que $AB = BA$ alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

(d) Dans ce qui suit, nous supposons que $\pi_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ est une loi de probabilité initiale quelconque.

i. Pour tout $n \geq 0$, exprimer π_n en fonction de π_0, P et n.

ii. A quelle(s) condition(s) sur π_0, π_n converge vers la loi invariante π_* obtenue dans la question 3 ?

iii. Donner un exemple de loi de probabilité initiale π_0 telle que π_n ne converge pas vers π_*.