BTS - chapitre 2

Dérivation de fonctions

Exercice 1. Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

$$f(x) = 7x - 2 \quad ; \quad ; \quad g(x) = x^2 + 8x - 1 \quad ; \quad h(x) = -7x^3 + 0,001x^2 - 6x \quad ; \quad i(x) = 8x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 34x + 12.$$

Exercice 2. Déterminer les variations des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \quad ; \quad f(x) = \frac{2x+1}{x+1} \quad ; \quad h(x) = \frac{3x-1}{x^2+x+1}.$$

Etude de variations

Exercice 3. Une petite entreprise fabrique des chaudières à bois pour des immeubles. Pour des raisons de stockage, la production mensuelle x est comprise entre 0 et 20 unités. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction B définie sur $[0, 20])$ par

$$B(x) = -0,5x^2 + 10x + 8.$$

1. Calculer le bénéfice correspondant à 3 chaudières.
2. Calculer la dérivée B' et étudier son signe.
3. Déduire de la fonction précédente, le nombre de chaudières à fabriquer pour avoir un bénéfice mensuel maximal. Que vaut ce dernier.

Exercice 4. Un producteur de truffe noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe. Le bénéfice hebdomadaire (en euros) réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes est donné par la fonction

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x \quad \text{avec} \quad x \in [0; 45]$$

1. Calculer $B'(x)$.
2. A l'aide de Δ, déterminer le signe de $B'(x)$ sur $[0; 45]$. En déduire le tableau de variation de la fonction B.
3. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? A combien s'élève-t-il alors ?

Exercice 5. Nous disposons d'une feuille de carton rectangulaire, de 80 cm sur 50 cm, avec laquelle nous souhaitons fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour cela, nous découpons aux quatre coins de la feuille des carré de x cm, en pliant les partie restantes de la feuille nous obtenons la boite désirée. Nous admettrons que le volume de cette boite (en fonction de x) est donnée par la formule

$$V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x \quad \text{avec} \quad x \in]0; 25[$$

1. En utilisant la fonction dérivée V', déterminer la valeur de x qui rend maximal le volume de la boite obtenue.
2. Quels sont alors les dimensions et le volume de la boite obtenue ?

Exercice 6. Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner une forme idéale pour réaliser des enrobages. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 12, 5]$ par

$$f(t) = 0,14t^3 - 3,15t^2 + 18,48t + 18.$$

Lorsque t représente le temps (en minutes), on admet que $f(t)$ modélise la température (en degré Celsius) du chocolat à l'instant t, au cours d'une opération de tempérage.

1. Calculer $f'(x)$.
2. A l'aide de Δ, déterminer le signe de $B'(x)$ sur $[0; 12, 5]$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. Selon ce modèle, quelle est la température maximal atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?

Exercice 7. On veut réaliser une boite de rangement rectangulaire de largeur $12 - x$, de longueur $12 - x$ et de hauteur x où $x \in [0; 12]$ décimètre.

1. Justifier que le volume de la boite de rangement est donné par la fonction
$$f(t) = x^3 - 24x^2 + 144x \quad \text{avec} x \in [0; 12].$$
2. Calculer $f'(x)$.
3. A l'aide de Δ, déterminer le signe de $B'(x)$ sur $[0; 12, 5]$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle le rangement a un volume maximal. Quel est ce volume maximal ?

Dérivation de quotients

Exercice 8. Calculer la dérivée les fonctions suivantes. L'étude des variations n'est pas demandée.

1. $f(x) = \frac{2x-1}{+1}$.
2. $g(x) = \frac{x-1}{-2x+3}$.
3. $h(x) = \frac{x(x+5)}{x^2+x+1}$.
4. $\phi(x) = \frac{2x+1}{3x^3+3}$.
5. $\psi(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. Une pierre est lancée vers le haut, à partir du sommet d'une falaise, du bord de la mer, et éventuellement elle tombe dans l'eau.

Après t secondes, la pierre se trouve à une altitude de $h(t)$ mètres au-dessus de l'eau telle que

$$h(t) = 24 + 8t - 2t^2 \quad \text{avec} \quad t \in [0; 6].$$

1. Déterminer la hauteur de la falaise sachant que la pierre est lancée à l'instant $t = 0$.
2. Déterminer de combien de mètres s'élèves la pierre au maximum au-dessus de la falaise.
3. Déterminer après combien de secondes la pierre frappe la surface de l'eau

Exercice 10. On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible un conteneur en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur est $V = 37,5\,m^3$.

1. On admet que le volume du parallélépipède est $V = h \times x \times 6$. Déduire de cette information une expression de h en fonction de x.
2. Montrer que l'aire totale du conteneur (la somme des aires des six faces) s'écrit en fonction de x par
$$S(x) = 12x + 12,5 + \frac{75}{x}$$
3. Démontrer que pour tout $x \in [0,5\,;\,6]$,
$$S'(x) = \frac{12(x-2,5)(x+2,5)}{x^2}$$
4. Etablir le tableau de variation de S sur $[0,5\,;\,6]$.
5. En déduire les valeurs de x et h correspondant à une aire minimale.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$$

1. Tracer la courbe sur votre calculatrice.
2. Y-a-t-il des extremums ? Préciser leur nature et déterminer (à l'aide de la calculatrice) une valeur approchée des coordonnées de ceux-ci.
3. Conjecturer le comportement de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
4. Obtenir, à l'aide de la calculatrice, un encadrement (au centième) de α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\in [3; 3,5]$.