Chapitre 6 - Logarithme népérien

0.1 Equations

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes en utilisant la fonction $x \mapsto \ln x$.

$$e^{x+1} = 3 \quad ; \quad e^{-2x+1} = 10 \quad ; \quad e^{x} - 5 = 0 \quad ; \quad 4e^{x} - 2 = 0 \quad ; \quad e^{2x} + 3 = 0.$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes en utilisant la fonction $x \mapsto e^x$.

$$lnx - 5 = 0 \quad ; \quad 4\ln x - 2 = 0 \quad ; \quad \ln(x+1) = 2 \quad ; \quad 5\ln x - 8 = 0 \quad ; \quad 2\ln(x+3) = 10.$$

Exercice 3. Déterminer le domaine de définition de ces fonctions.

$$f(x) = \ln(3x-1), \quad \phi(x) = \ln(-x^2+3x+4), \quad \psi(x) = x^2 + 1 + 2\ln x.$$

0.2 Propriétés algébriques

Exercice 4. En utilisant les propriétés du logarithme, simplifier les expressions suivantes :

$$A = 2\ln 5 + 3\ln 2 - \ln 16 \quad ; \quad B = -3\ln 3 + \ln 9 + 1 \quad ; \quad C = 4\ln 3 + 2\ln 5 + 4\ln 1 \quad ; \quad 2\ln 4 - 3\ln 3.$$

Exercice 5. Vérifier, sans calculatrice, les égalités suivantes :

$$\ln 3 + \ln 9 + 3\ln(\frac{1}{3}) = 0 \quad ; \quad 3\ln e + \ln(e^4) + 5\ln(\frac{1}{e}) = 2.$$

Exercice 6. Donner une nouvelle expression, la plus simple possible, des quantités suivantes :

$$A = \ln(e^2), \quad B = \ln(e^{-3}), \quad C = \ln 5 - \ln 7, \quad D = e^{\ln 2 + \ln 3}, \quad E = \ln\frac{5}{2} + \ln\frac{2}{5}, \quad F = \frac{\ln 100}{\ln 10}.$$

$$G = \ln(8) - \ln(12) + \ln(15) \quad ; \quad H = \ln 6 - \ln 2 + \ln 4 \quad ; \quad I = \ln e^2 \quad ; \quad e^{-\ln 3}.$$

0.3 Inéquations

Exercice 7. Résoudre les inéquations suivantes :

$$e^x < 5 \quad ; \quad e^x > 4 \quad ; \quad \ln x \leq 3 \quad ; \quad \ln x + 3 \leq 0 \quad ; \quad \ln x > 4.$$

Exercice 8. 1. Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$0,8^n \leq 10^{-5}.$$

2. Reprendre la question précédente avec la condition $1,5^n > 100$.
3. Même chose avec la condition $1,1^n > 10^3$.

0.4 Dérivées et études de variations

Exercice 9. Dériver les fonctions suivantes et étudier leurs variations sur $]0;+\infty[$.

$$f(x) = 4x - \ln x \quad ; \quad g(x) = 2x + \ln x \quad ; \quad x^2 - 2\ln x \quad ; \quad -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 5\ln x.$$

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $[1,30]$ par

$$f(x) = x + 50 - 18\ln x.$$

1. Montrer que $f'(x) = \frac{x-18}{x}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1,30]$.
3. En déduire le sens de variations de f sur cette intervalle.
4. Compléter le tableau suivant :

x	1	5	10	15	18	20	25	30
$f(x)$								

5. Représenter graphiquement la fonction f dans une repère orthonormé : unités graphiques, 1 carreau représente 2 unités sur les deux axes.
6. La courbe admet-elle une tangente horizontale ? Justifier votre réponse et Placer cette tangente sur le graphique.

Exercice 11. Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs. Nous considérons la fonction f définie sur $[1;9]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln x.$$

On admet que $f(x)$ modélise le coût moyen annuel (exprimé en centaine d'euros) pour la fabrication de x pneus.

1. Montrer que, pour tout $x \in [1; 9]$,
$$f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}.$$
2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1; 9]$
3. A partir de ce qui précède, dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1; 9]$.
4. Pour quelle quantité de pneus, le coût moyen annuel de fabrication est-il minimal ? A combien s'élève-t-il ?
5. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement au centième de la solution de l'équation $f(x) = 5$.