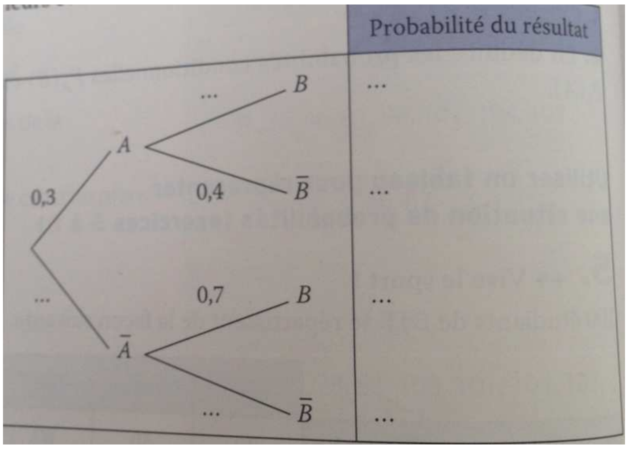
Variables aléatoires, loi de probabilité

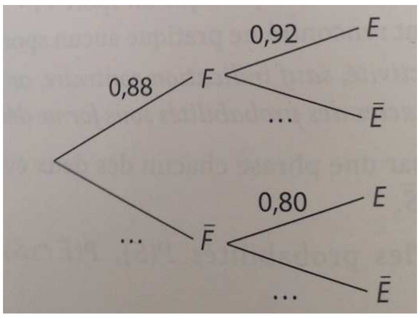
0.1 Arbres pondérés

Exercice 1. Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous. Dans celui-ci, A et B désignent deux évènements ; $\bar{A}$ et $\bar{B}$ représentent leur évènement complémentaire.



1. Compléter l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité des évènements obtenus à la fin de chaque branche.
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 2. Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré suivant. Dans celui-ci, E et F désignent deux évènements ; $\bar{E}$ et $\bar{F}$ représentent leur évènement complémentaire.



1. Compléter l'arbre pondéré.
2. En déduire les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(\bar{F}), \mathbb{P}_F(E), \mathbb{P}_{\bar{F}}(E)$ et $\mathbb{P}_{\bar{F}}(\bar{E})$.

3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(F \cap E), \mathbb{P}(\bar{F} \cap E)$ et $\mathbb{P}(\bar{F} \cap \bar{E})$.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(E)$.

Exercice 3. Une urne contient 2 boules rouges et 8 boules blanches ; toutes les boules sont indiscernables au touché. On prélève au hasard une boule dans l'urne. N désigne l'évènement « obtenir une boule noire » et B désigne l'évènement « obtenir une boule blanche ».

1. Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Trois prélèvements (avec remise) dans l'urne sont réalisés de manière successive. Compléter l'arbre pondéré en conséquent.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E : « obtenir trois boules noires ».
4. Montrer que la probabilité de l'évènement F : « obtenir exactement deux boules noires » vaut $0,096$.

0.2 Epreuves de Bernoulli

Exercice 4. Des plats cuisinés d'un certain type sont fabriqués en grande quantités. Parmi les 5 000 plats préparés, on prélève l'un d'entre eux au hasard pour vérifier s'il est conforme (C désignera un tel évènement) ; lors du dernier contrôle, 4850 plats étaient conformes.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
2. Justifier que l'expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli.
3. Donner deux exemples d'expériences aléatoires qui ne sont pas des épreuves de Bernoulli.

0.3 Schéma de Bernoulli et loi Binomiale

Exercice 5.

1. Sachant que $X \sim B(6; 0,4)$, calculer (à l'aide d'une calculatrice) $\mathbb{P}(X = 3), \mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X \leq 2)$.
2. Sachant que $Y \sim B(6; 0,6)$ calculer (à l'aide d'une calculatrice) $\mathbb{P}(Y = 6), \mathbb{P}(6 \leq 2)$ et $\mathbb{P}(Y > 1)$.

Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Exercice 6. Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium. Les véhicules sont parqués par lots de 75 avant de recevoir le certificat de conformité et d'être mis en location dans une grand agglomération. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de véhicules non conformes dans un lot. On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non conforme vaut $0,04$.

1. Quelle est l'épreuve de Bernoulli mise en jeu ?
2. Justifier que X suit une loi binomiale et donner les paramètres de la loi.
3. Quelle est la probabilité de l'évènement « tous les véhicules du lot sont conformes ». Arrondir à 10^{-3}.

Exercice 7. Une entreprise fabrique en grande quantité des slips de luxe. On admet que 95% des pièces produites sont conformes. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de slips défectueux dans un lot de 80 slips.

1. Justifier que X suit une loi binomiale, préciser la valeurs de paramètres de la loi.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 3 slips non conformes.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 1 slip non conforme.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

0.4 Représentation

Exercice 8.
1. Sachant que X suit une loi binomiale $B(n;p)$ de paramètres $n = 6$ et $p = 0,4$, compléter le tableau suivant

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$							

pour ensuite construire le diagramme en bâtons représentant la loi.

2. Reprendre la question précédente avec $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$.

0.5 Espérance, variance et écart-type

Exercice 9. Une urne contient dix boules dont trois rouges ; les boules sont supposées indiscernables au touché. On tire successivement, avec remise, 8 boules les unes après les autres. Cela constitue un prélèvement. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges obtenues dans chaque prélèvements.

1. Dresser un arbre représentant l'épreuve de Bernoulli sous-jacente.
2. Justifier que X suit une loi binomiale, préciser la valeurs de paramètres de la loi.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 5)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$. Que représente $\mathbb{E}[X]$?

Tous les résultats seront à arrondir à 10^{-3}.

Exercice 10. Un représentant d'une marque d'automobiles démarche dix clients par jour. On suppose que chaque client lui commande une voiture neuve avec la probabilité $\frac{1}{20}$; il est également supposé que la décision d'un client n'a aucun impact sur celles des autres.

1. Calculer la probabilité, pour le concessionnaire, de vendre un jour choisi au hasard au mois de janvier :
   (a) au moins un voiture ;
   (b) exactement trois voitures.
2. Sachant qu'il touche 200 euros de commission par voiture vendue, calculer la probabilité qu'il gagne au moins 400 euros dans une journée.
3. Combien de voitures, le représentant peut-il espérer vendre dans une journée ?

Tous les résultats seront à arrondir à 10^{-3}.