Exponentielle

0.1 Propriétés algébriques

Exercice 1. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A = \exp(3x)\times\exp(6x-1) \quad ; \quad B = (\exp(x))^2\times\exp(-2x+1) \quad ; \quad C = \frac{\exp(2x+6)}{\exp(-3x+1)} \quad ; \quad D = \frac{\exp(x^2+1)}{\exp\big(x(x+1)\big)}.$$

Exercice 2. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A = \frac{4}{\exp(-2x)} \quad ; \quad B = (\exp(4x)) \times \exp(-3x+1) \quad ; \quad C = \frac{\big(\exp(x+1)\big)^2}{\exp(3x-4)}$$

Exercice 3. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x-1}{e^x+1}.$$

Exercice 4. Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^x(e^x+5) \quad ; \quad B = e^{-x}(e^x-2) \quad ; \quad C = e^{2x}(e^x-e^{-x})$$

Exercice 5. Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$A = (e^x+2)(e^x+5) \quad ; \quad B = (e^x-2)^2 \quad ; \quad C = (e^x-1)(e^{-x}+3)$$

Exercice 6. Factoriser les expressions suivantes, puis étudier leur signe (sauf pour C et E) :

$$A = 10e^x - 5xe^x \quad ; \quad B = 2xe^{-x} + 3e^{-x} \quad ; \quad C = e^{2x} - 4e^x \quad ; \quad D = e^{2x} + 2e^x + 1 \quad ; \quad E = e^{2x} - 16$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$e^{3x} = 0 \quad ; \quad e^{2x} = 1 \quad ; \quad e^x = -3 \quad ; \quad e^{-3x+6} = e \quad ; \quad 4e^{-x} + 7xe^{-x} = 0 \quad ; \quad \frac{5e^x-3}{e^x+1} = 1$$

Exercice 8. Considérons l'équation $(E)\ :\ e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

1. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X = e^x$. Montrer que (E) s'exprime de manière équivalente en $(E')\ :\ X^2 + 2X - 3 = 0$
2. Résoudre (E') d'inconnue X.
3. En déduire les solutions de (E) d'inconnue x.

0.2 Exponentielle et variations

Exercice 9. Etudier les variations des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 2e^x + 3x \quad ; \quad g(x) = -2x - e^x \quad ; \quad h(x) = x - e^{-2x} \quad ; \quad \phi(x) = 2x - e^{2x} \quad \psi(x) = 3e^x - 3x$$

Exercice 10. Soit f définie par $f(x) = (-2x+1)e^x$. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Indication : il faut employer la formule de dérivation d'un produit $(u \times v)'$ pour obtenir $f'(x)$. Pour étudier le signe de $f'(x)$, il faut d'abord factoriser.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + 4e^x - 6x$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 3)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{-x-1}{e^x}$.
3. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de f.
4. Justifier que la tangente (à C_f) au point d'abscisse -1 est horizontale.
5. Déterminer l'équation de la tangente (à C_f) au point d'abscisse 0.

0.3 Modélisation

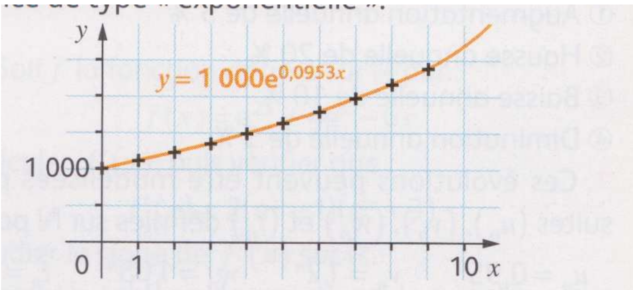
Exercice 13.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = e^{1,25n}$. Montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont un précisera le premier terme et la raison.
2. Reprendre la question précédente avec la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = 4130e^{-0,85n}$.

Exercice 14. On estime qu'une population de bactéries, composée initialement de 1 000 unités, augmente chaque semaine de 10%.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de bactéries au bout de n semaines d'évolution.
   (a) Déterminer le nombre de bactéries au bout d'une semaine, de deux semaines.
   (b) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n. Quelle est la nature de la suite ?

2. A l'aide d'un tableur, on a déterminé une fonction f ajustant les valeurs obtenues via la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. La fonction est donnée par $f(t) = 1\,000e^{0,0953t}$ pour tout $t \geq 0$.



(a) Pour tout $t \geq 0$, simplifier le quotient $\frac{f(t+1)}{f(t)}$. Mettre en relation avec la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(b) Calculer $f(2+\frac{1}{7})$. Interpréter le résultat. Aurait-on pu obtenir la même chose à l'aide de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

(c) Pour tout $t \geq 0$, simplifier $\frac{f(t+\frac{1}{7})}{f(t)}$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 15. Le livret A est un compte épargne exonéré d'impôts et de cotisations sociales. Au premier janvier 2019, les intérêts étaient de $0,75\%$ par an. Les intérêts sont ajoutés au capital placé à la fin de chaque année ; en particulier, ils produisent des intérêts les années suivantes.

Une famille ouvre un livret A dans une banque et dépose 5 000 euros dessus.

1. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, où $(u_n)_{n\geq 0}$ désigne le capital disponible au bout de n années de placement ? A l'aide de la calculatrice, noter dans un tableau les 11 premières valeurs. *Indication : utiliser la fonction table.*
2. Un tableur à permis d'ajuster la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. par la fonction $f(t) = 5\,000e^{0,0723t}$ avec $t \geq 0$.
   (a) A la calculatrice, construire le tableau de valeurs de la fonction f sur $[0;10]$ avec un pas de 1.
   (b) Comparer avec les valeurs obtenues dans la question 1.
   (c) Simplifier l'expression $\frac{f(t+1)}{f(t)}$. Interpréter.
   (d) Un livret est plafonné à 22 950. En quelle année atteindra-t-on ce plafond ?

Exercice 16. On considère les quatre évolutions suivantes :
- augmentation annuelle de 5%,
- hausse annuelle de 20%,
- baisse annuelle de 10%,
- diminution annuelle de 5%.

1. Ces évolutions peuvent être modélisées par les suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ et $(t_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$u_n = 0,95^n \quad ; \quad v_n = 1,2^n \quad ; \quad w_n = 1,05^n \quad ; \quad t_n = 0,9^n.$$

   Associer suites et évolution en justifiant votre réponse.

2. Ces évolutions peuvent aussi être modélisées par les f, g, h et k définies sur $[0 : +\infty[$ par

$$f(t) = e^{0,0488t} \quad ; \quad g(t) = e^{-0,105t} \quad ; \quad h(t) = e^{-0,051t} \quad ; \quad k(t) = e^{0,1823t}.$$

   Associer fonctions et évolutions, en justifiant.

Exercice 17. Soit $f(x) = e^{kx}$ avec $k \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

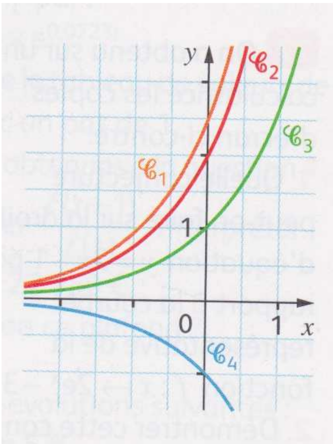
- si $k > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $k > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'(x) = ke^{kx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer la propriété.
3. Quel impact a la taille de k sur les variations de f ? Confronter votre réponse avec plusieurs exemples.

Exercice 18 (Sans calculatrice). On a représenté ci-dessous, les fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x} \quad ; \quad g(x) = 2e^{x} \quad ; \quad h(x) = 2,5e^{x} \quad h(x) = -e^{x}.$$

Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente.



0.4 Exercices supplémentaires

Voici une liste, non exhaustive, d'exercices supplémentaires (de votre livre) vous permettant de vous entrainer.

- Calculs algébriques : exercices $12, 15, 16, 19, 22$ pages $186 - 187$.
- Equations et inéquations : exercices $24, 26, 28, 31$ page 187.

- Suites : exercice 32 page 187
- Représentations graphiques : exercices $47, 48$ page 188.
- Etude de fonction : exercices $38, 40$ page 188 et exercices $72, 74$ page 190.