0.1 Exercices chapitre 8 : loi à densité (1ère partie)

0.1.1 Loi uniforme

Exercice 1. $X \sim \mathcal{U}[0;4]$.

1. Donner la fonction de densité de X.
2. Déterminer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}\big(X \in [1;3]\big) \quad ; \quad \mathbb{P}(X \leqslant 10) \quad ; \quad \mathbb{P}(0,2 \leqslant X \leqslant 3,5) \quad ; \quad \mathbb{P}(X \leqslant 1) \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 1) \quad ; \quad \mathbb{P}(X > 1).$$

3. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}[X]$. Donner une interprétation du résultat.
4. Déterminer la variance $\text{Var}(X)$.

Exercice 2. Le standard téléphonique d'un grand magasin limite la durée d'attente en transférant le plus vite possible les appels sur les autres postes.

On s'intéresse aux appels dont la durée d'attente est comprise entre 10 secondes et 1 minutes. On note T la variable aléatoire qui, à un tel appel pris au hasard, associe la durée de l'attente. On admet que $T \sim \mathcal{U}[10;60]$.

1. Donner la fonction de densité de T.
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A : « la durée de l'attente est inférieure à 20 secondes ».
   (b) B : « la durée de l'attente est supérieure à 40 secondes ».
   (c) C : « la durée de l'attente est comprise entre 20 et 40 secondes ».
3. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}[T]$. Donner une interprétation du résultat.
4. Déterminer la variance $\text{Var}(T)$.

0.1.2 Loi Normale

Exercice 3. $X \sim \mathcal{N}(100;12)$.

1. Déterminer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-2}) :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 80) \quad ; \quad \mathbb{P}(X > 80) \quad ; \quad \mathbb{P}(90 \leqslant X \leqslant 120) \quad ; \quad \mathbb{P}(70 \leqslant X \leqslant 110).$$

Exercice 4. Une entreprise de transport a un parc total de 150 camions. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque camion tiré au hasard dans le parc, associe la distance (en km) qu'il a parcourue dans le monde. On admet que $X \sim \mathcal{N}(120;14)$.

Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure un jour donné une distance comprise entre 110 et 130 km. Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Exercice 5. On note X la variable aléatoire qui, à chaque homme choisi au hasard parmi les étudiants d'un campus universitaire, associe sa taille (en cm). On admet que $X \sim \mathcal{N}(178; 10)$.

Déterminer la probabilité des évènements suivants. Arrondir le résultat à 10^{-3} :

1. A : « la taille est supérieure à 180 cm ».
2. B : « la taille est supérieure à 190 cm ».
3. C : « l la taille est inférieure à 150 cm ».
4. D : « la taille est comprise entre 160 et 185 cm ».

Exercice 6. On s'intéresse aux factures comptabilisées chaque mois dans un garage. On note X la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard parmi les factures éditées durant un mois donnée, associe son montant en euros. On admet que $X \sim \mathcal{N}(840; 400)$. Les probabilités sont à arrondir à 10^{-3} et les sommes en euros au centime.

1. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 600 euros et inférieur ou égale à 2 000 euros, le garage propose le paiement *en trois fois sans frais*. Calculer la probabilité de cet évènement.
2. Pour les factures dont le montant est inférieur ou égal à 600 euros, le garage demande un paiement comptant. Calculer la probabilité de cet évènement.
3. Déterminer le montant x pour lequel $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0,99$.

0.1.3 Approximation par la loi normale

Exercice 7. Soient $X \sim B(80; 0,4)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 38)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 26)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(27 \leqslant X \leqslant 38)$.
2. Y correspond à une approximation de la loi binomiale par une loi normale.
   (a) Déterminer la valeur de μ et σ. Arrondir σ à 10^{-2}.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(27 \leqslant Y \leqslant 38)$ et comparer avec la question 1.

Exercice 8. *Dans cette activité chaque probabilité demandée est à arrondir à* 10^{-4}.

Une enquête permet d'estimer que la probabilité qu'une lettre, prélevée au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire en France, parvienne à son destinataire le lendemain est de $0,7$.

Dans une entreprise de Marne-la-vallée, on admet que l'on expédie 100 lettres par jour. On note X la variable aléatoire qui, à un jour jour choisi au hasard, associe le nombre de lettres qui parviendront le lendemain. On suppose que les acheminements de ces lettres sont indépendantes.

1. **Loi Binomiale**
   (a) Expliquer pour X suit une loi binomiale $B(n; p)$. Préciser la valeurs des paramètres n et p.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

(c) Nous admettons que $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Déterminer l'écart-type de X. Arrondir le résultat à 10^{-1}.

(d) Calculer la probabilité que 60 lettres exactement parviennent à leur destinataire le lendemain.

(e) Calculer $\mathbb{P}(55 \leqslant X \leqslant 85)$.

2. **Loi Normale** : on décide d'approcher X par $Y \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$.

   (a) Vérifier que le théorème de Moivre-Laplace s'applique. Préciser la valeurs des paramètres μ et σ.

   (b) Calculer la probabilité qu'au moins 80 des 100 lettres arrivent à leur destinataire le lendemain, c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y \geqslant 79,5)$.

   (c) Calculer la probabilité que le nombre de lettres arrivant à leur destinataire soit compris entre 55 et 85 lettres, c'est à dire $\mathbb{P}(54,5 \leqslant Y \leqslant 85,5)$. Comparer avec le résultat obtenu avec la variable X.