0.1 Exercices chapitre 8 : loi à densité (2ème partie)

0.1.1 Loi exponentielle

Exercice 1. Soit $X \sim \mathcal{E}(0,05)$.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}).

$$\mathbb{P}(25 \leq X \leq 35) \quad ; \quad \mathbb{P}(X \leq 20) \quad ; \quad \mathbb{P}(X > 40)$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 2. On s'intéresse à une machine à embouteiller prélevée au hasard dans les stocks d'un constructeur. On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard, associe sa durée de vie avant une défaillance. On suppose que $T \sim \mathcal{E}(0,005)$.

1. Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard fonctionne plus de 200 jours sans panne.
2. Déterminer t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard fonctionne plus de t jours soit égale à $0,8$. Arrondir à l'entier.

Exercice 3. T est la variable aléatoire qui, à tout tube fluorescent, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures). On suppose que $T \sim \mathcal{E}(0,001\,5)$.

1. Donner la densité de probabilité de T.
2. Calculer les probabilités des évènements suivants (arrondir à 10^{-2}).
   (a) A : « la durée de bon fonctionnement est comprise entre 600h et 700h ».
   (b) B : « la durée de bon fonctionnement est inférieure à 800h ».
   (c) C : « Le tube prélevé fonctionne encore après 750h ».
   (d) B : « Le tube prélevé arrête de fonctionner au bout de 670h ».
3. Déterminer $\mathbb{E}[T]$ et interpréter le résultat en fonction du contexte.

0.1.2 Loi de Poisson

Exercice 4. Soit $X \sim \mathcal{P}(2)$. A l'aide d'une calculatrice, vérifier que

$$\mathbb{P}(X = 1) \approx 0,271 \quad ; \quad \mathbb{P}(X \leq 1) \approx 0,406 \quad ; \quad \mathbb{P}(X > 2) \approx 0,323.$$

Exercice 5. Une statistique officielle montre, qu'en France, il y a deux morts par an par noyade pour 100 000 habitants. Soit X la variable aléatoire qui à toute ville d'environ 150 000 habitants tirée au hasard associe le nombre de ses noyés pendant une année. Nous admettons que $X \sim \mathcal{P}(3)$. Calculer la probabilité des évènements suivants.

1. A : « il n'y a aucune noyade cette année ».
2. B : « il y a deux noyades cette année ».

3. C : « il y a cinq noyades cette année ».
4. B : « il y a plus de trois noyades cette année ».

Arrondir à 10^{-2}.

Exercice 6. 3% des bouteilles d'eau fabriquées par une usine sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prélevées au hasard dans la production d'une journée, associe le niombre de bouteilles défectueuses. On admet que $X \sim \mathcal{P}(3)$.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants. Arrondir à 10^{-3}.
   (a) A : « il y a une bouteille défectueuse ».
   (b) B : « il y a exactement deux bouteilles défectueuses ».
   (c) C : « il y a plus de deux bouteilles défectueuses ».
2. Déterminer $\mathbb{E}[X]$ et donner une interprétation du résultat.

0.1.3 Approximation par la loi normale

Exercice 7. Une usine produit des articles dont 3% présentent des défauts. Pour contrôler la qualité de leur production, on prélève au hasard un échantillon de 120 articles dans la production d'une journée. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui associe, à tout prélèvement de 120 articles, le nombre d'articles défectueux.

1. Quelle loi suit X ? Justifier votre réponse et préciser la valeurs des paramètres associés.
2. Justifier qu'il est possible d'approcher la loi de X par une loi de Poisson dont on précisera les paramètres.
3. Soit $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (où λ a été déterminé à la question précédente). Déterminer à l'aide de cette nouvelle variable aléatoire les probabilités des évènements suivants. Arrondir à 10^{-3}.
   (a) A : « l'échantillon contient au moins un article défectueux ».
   (b) B : « l'échantillon contient au plus trois articles défectueux ».

Exercice 8. *Dans cet exercice les résultats sont à arrondir à* 10^{-2}.

Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges en plastique de longueur théorique 100 mm. Dans un lot de ce type de tiges, 2% des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérifier la longueur de celles-ci. Le lot est assez important pour que ce prélèvement soit assimilable à un tirage avec remise. On considère X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueurs non conformes.

1. Pour cette question $n = 50$.
   (a) Justifier que X suit un loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$.
2. Pour cette question $n = 100$.Nous décidons d'approcher X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

(a) Justifier que cette approximation est possible et déterminer la valeur de λ.

(b) Calculer $\mathbb{P}(Y = 3)$. Comparer avec le résultat obtenu plus tôt.

(c) A l'aide de la variable Y, calculer la probabilité d'avoir au plus 4 tiges de longueur non conformes.

Exercice 9. *Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

Un industriel fabrique des tuyaux en PVC destinés à l'évacuation des eaux sanitaires des habitations.

Partie A : Loi binomiale et loi de Poisson.

Les résultats sont à arrondir à 10^{-3}.

1. On s'intéresse à une livraison importante de tuyaux en PVC pour un grand groupe du secteur de la construction. On note E l'évènement : « un tuyau prélevé au hasard est défectueux »et on suppose que $\mathbb{P}(E) = 0,015$. On prélève 20 tuyaux au hasard dans la livraison pour vérifier leur état. On suppose que la livraison est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tuyau défectueux dans ce prélèvement.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Calculer la probabilité qu'aucun des tuyaux ne soit défectueux.

   (c) Calculer la probabilité qu'au plus deux des tuyaux ne soit défectueux.

2. On prélève maintenant au hasard 200 tuyaux et on note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de tuyau défectueux dans ce prélèvement. On admet que $Y \sim B(200; 0,015)$, on souhaite approcher Y par $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

   (a) Justifier que cette approximation est possible et déterminer la valeur de λ.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(Z \leq 4)$.

Partie B : Loi normale.

Les résultats sont à arrondir à 10^{-2}.

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre (exprimé en mm) extérieur des tuyaux. On note D la variable aléatoire qui, à tout tuyau prélevé au hasard dans la production de la journée, associe sont diamètre extérieur. On suppose que $D \sim \mathcal{N}(40; 0,2)$.

un tuyau n'est commercialisé qu'à condition que son diamètre extérieur soit compris entre $39,6$ mm et $40,4$ mm. Calculer la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production soit commercialisable.