# TRAVAILLER LES AUTOMATISMES

## À L'ORAL

**18** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants.

**1.** $a = 3 + 2\mathrm{i}$ **2.** $b = -2\mathrm{i} + 4$

**3.** $c = \dfrac{3+5\mathrm{i}}{2}$ **4.** $d = \dfrac{2\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}$

**5.** $e = 4\mathrm{i}$ **6.** $f = 0$

**7.** $g = \mathrm{i}^2$ **8.** $h = \mathrm{i}^7$

**19** On considère un réel $a$ et le nombre complexe $z = a^2 + 1 + 2\mathrm{i}(a^2 - 3)$.

**1.** Déterminer les éventuelles valeurs de $a$ pour lesquelles $z$ est un réel.

**2.** Déterminer les éventuelles valeurs de $a$ pour lesquelles $z$ est un imaginaire pur.

**20** Déterminer mentalement les formes algébriques des nombres suivants.

**1.** $\mathrm{Z}_1 = (2 + 4\mathrm{i})^2$

**2.** $\mathrm{Z}_2 = (3 - 2\mathrm{i})^2$

**3.** $\mathrm{Z}_3 = (1 + \mathrm{i})^3$

**21** Déterminer les conjugués des nombres suivants.

**1.** $\mathrm{A} = 3 + 2\mathrm{i}$ **2.** $\mathrm{B} = \mathrm{i}$

**3.** $\mathrm{C} = 3\mathrm{i} - 4$ **4.** $\mathrm{D} = -5 - 6\mathrm{i}$

**22** VRAI / FAUX L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

« Pour tous nombres complexes $a$ et $b$, le conjugué de $(a + \mathrm{i}b)^2$ est $a^2 + b^2 - 2\mathrm{i}ab$. »

**23** On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \text{ et } z_2 = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

Sans effectuer le calcul, justifier que $z_1 + z_2$ est un nombre réel.

**24** Résoudre mentalement dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

**25** On considère la fonction polynôme $\mathrm{P}$ définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $\mathrm{P}(z) = z^3 - 12z^2 + 37z - 40$.

On admet qu'il existe un réel $k$ tel que :

$$\mathrm{P}(z) = (z - k)(z^2 - 4z + 5).$$

En déduire une racine réelle de $\mathrm{P}$.

## Forme algébrique

*Pour les exercices* **26** *à* **30**

Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés.

**26** **1.** $a = 2 + 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 3$ **2.** $b = 1 + \mathrm{i} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}\right)$

**3.** $c = -2 + 3\mathrm{i} - (3 - 3\mathrm{i})$ **4.** $d = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} - \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$

**27** **1.** $a = -(1 + \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right)$

**2.** $b = 2\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})$

**3.** $c = -\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}) - \sqrt{3}(\mathrm{i}\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$

**4.** $d = \mathrm{i}\sqrt{2}(2\sqrt{2} - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\sqrt{3}(\mathrm{i} - \sqrt{3})$

**28** **1.** $a = (2 + \mathrm{i})(1 + 3\mathrm{i})$ **2.** $b = \left(\frac{3}{2} - 2\mathrm{i}\right)\left(2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$

**3.** $c = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1 + 2\mathrm{i})$ **4.** $d = \left(-\frac{2}{3} - \mathrm{i}\right)(3 - 4\mathrm{i})$

**29** **1.** $a = (3 + 5\mathrm{i})^2$ **2.** $b = \left(3\mathrm{i} - \frac{1}{3}\right)^2$

**3.** $c = (2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i})$ **4.** $d = (\mathrm{i}\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{3})$

**30** **1.** $a = (2 + \mathrm{i})^3$ **2.** $b = (1 - 2\mathrm{i})^4$

**3.** $c = (1 - \mathrm{i})^5$ **4.** $d = (1 + \mathrm{i})^5$

**31** Soient $a$ et $b$ deux réels et $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes définis par $z_1 = a^2 + a + \mathrm{i}(b^2 + 1)$ et $z_2 = 3a^2 - 3 + 2\mathrm{i}b$.

Déterminer les éventuelles valeurs de $a$ et $b$ telles que $z_1$ et $z_2$ soient égaux.

**32** Soient $x$ un réel et deux nombres complexes $z_1$ et $z_2$ définis par $z_1 = 3x - 3 + \mathrm{i}(x^2 + 1)$ et $z_2 = x^2 - x + \mathrm{i}(x^2 - 1)$.

**1.** Déterminer les éventuelles valeurs de $x$ telles que $z_1 + z_2$ soit un imaginaire pur.

**2.** Déterminer les éventuelles valeurs de $x$ telles que $z_1 + z_2$ soit un réel.

## Résolution d'équations

*Pour les exercices* **33** *et* **34**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue $z$.

On écrira les solutions sous forme algébrique.

**33** **1.** $3z - 2\mathrm{i} + 4 = \mathrm{i} - 2z$ **2.** $3\mathrm{i} - 2z + 1 = \mathrm{i}(\mathrm{i}z + 4) - 2$

**3.** $3(z + \mathrm{i}) - 2z = \mathrm{i} + z$ **4.** $(1 + 5\mathrm{i})\overline{z} - 2 = 2 + \mathrm{i}\overline{z} + \overline{z}$

**34** **1.** $2z-3i\overline{z}=-5-i$
**2.** $iz+\overline{z}-3=7-\overline{z}+5i$
**3.** $2z-i\overline{z}=i(3+z)+\overline{z}$
**4.** $2i(z+1)+3\overline{z}+1=3z-i\left(\overline{z}+\frac{5}{2}\right)$

## Inverse et quotient

**35** Écrire les nombres suivants sous forme algébrique.

**1.** $a=\frac{1}{3+2i}$ **2.** $b=\frac{4}{-2-i}$
**3.** $c=\frac{1+i}{1+i}$ **4.** $d=\frac{6+4i}{-5-3i}$

**36** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

**1.** $3z-i=iz-2$ **2.** $2(1+z)-i=(1+i)z$
**3.** $(1+i)z-2=2-iz$ **4.** $z(1+2i)+3=3(iz-1)$

## Opérations et conjugués

*Pour les exercices* **37** *à* **39**
Écrire le conjugué de $z$ sous forme algébrique.

**37** **1.** $z=i(2+2i)-3i(1+2i)$
**2.** $z=-2i(1+i)+\frac{3}{2}i(2-4i)$
**3.** $z=(2+i)(1+3i)$
**4.** $z=(2i-3)(3+i)$

**38** **1.** $z=(1+i)^2$ **2.** $z=(2+i)^3$
**3.** $z=(1-i)^4$ **4.** $z=(3+2i)^3$

**39** **1.** $z=\frac{1}{i}$ **2.** $z=\frac{1}{1+i}$
**3.** $z=\frac{2+i}{1-2i}$ **4.** $z=\frac{1-i}{2i-1}$
**5.** $z=\frac{3+2i}{2i-3}$ **6.** $z=\frac{-1-i}{2+i}$

*Pour les exercices* **40** *et* **42**
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

**40** VRAI / FAUX « Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\overline{2+iz}=2-iz$. »

**41** VRAI / FAUX « $\frac{2+i}{3-i}-\frac{2-i}{3-i}$ est un imaginaire pur. »

**42** VRAI / FAUX « Pour tout entier naturel $n$, $(4+2i)^n+(4-2i)^n$ est un réel. »

## Équations polynomiales

*Pour les exercices* **43** *et* **44**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes. On écrira les solutions éventuelles sous forme algébrique.

**43** **1.** $z^2-2z+5=0$ **2.** $z^2-4z+13=0$
**3.** $4z^2+4z+5=0$ **4.** $2z^2+6z+5=0$

**44** **1.** $z^2+z=3z-3$ **2.** $(z+1)^2-2z=0$
**3.** $z+6=-\frac{13}{z}$ **4.** $z=1-\frac{1}{z}$

**45** Après avoir écrit chacune des expressions sous la forme $z^n-a^n$ avec $a\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, factoriser ces expressions le plus possible.

**1.** $z^3-1$ **2.** $z^3+27$ **3.** $z^4-16$ **4.** $z^5-i$

**46** Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4+z^3+2z^2+z+1$.
Peut-on factoriser P par $(z-i)$ ? Justifier.

*Pour les exercices* **47** *à* **50**
Montrer que le nombre $a$ est une racine du polynôme P, puis factoriser P en produit de polynômes de degré 1.

**47** $P(z)=z^3+4z^2+6z+4$ et $a=-2$.

**48** $P(z)=2z^3-14z^2+38z-26$ et $a=1$.

**49** $P(z)=z^4-2z^3+z^2+2z-2$ et $a=-1$.

**50** $P(z)=z^4-z^3-5z^2-z-6$ et $a=i$.

**AIDE**
Montrer que $-i$ est une racine du polynôme de degré 3 obtenu après la première factorisation.

**51** Dans chacun des cas suivants, déterminer deux nombres complexes $z_1$ et $z_2$ sachant que leur somme est égale à S et que leur produit est égal à P.

**1.** $S=0$ ; $P=9$ **2.** $S=25$ ; $P=26$
**3.** $S=1$ ; $P=\frac{13}{2}$ **4.** $S=2\sqrt{2}$ ; $P=3$
**5.** $S=\frac{5}{3}$ ; $P=-\frac{2}{3}$ **6.** $S=0$ ; $P=1$

DIFFÉRENCIATION

Parcours 1 : exercices 55 ; 59 ; 79 ; 84 ; 94 ; 111 ; 116 et 120
Parcours 2 : exercices 57 ; 60 ; 67 ; 85 ; 96 ; 112 et 122
Parcours 3 : exercices 65 ; 102 ; 124 ; 127 et 130

# 1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

## Exercices FLASH

**52** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres suivants.

1. $z_1 = 2$
2. $z_2 = -3\mathrm{i}$
3. $z_3 = \mathrm{i} - 3$
4. $z_4 = z_1 + z_3$
5. $z_5 = z_2 \times z_3$

**53** Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels $a$ et $b$ vérifiant l'égalité.

1. $a + 3\mathrm{i} = 2 + \mathrm{i}(1 - b)$
2. $2 + a + \mathrm{i}(b^2 + b) = \mathrm{i}(2b - \mathrm{i}a^2) + 3a + 3$

**54** Écrire chacun des nombres suivants sous forme algébrique.

1. $z_1 = (3 - 2\mathrm{i}) - (3 + 2\mathrm{i})$
2. $z_2 = 2(1 + \mathrm{i}) + \mathrm{i}(2\mathrm{i} - 1)$
3. $z_3 = (1 + \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$
4. $z_4 = (1 - \mathrm{i})^3$
5. $z_5 = (1 - \mathrm{i})^5$

*Pour les exercices* **55** *à* **60**

Écrire les nombres complexes sous forme algébrique.

**55** [Calculer.]

1. $z = (3 - 5\mathrm{i}) + (3\mathrm{i} - 2)$
2. $z = (2\mathrm{i} - 3) + (-1 - 2\mathrm{i})$
3. $z = -\left(1 - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathrm{i} + 2\right)$
4. $z = \left(3 - \frac{2}{3}\mathrm{i}\right) - \left(2 + \frac{1}{3}\mathrm{i}\right)$

**56** [Calculer.]

1. $z = (-3 + 2\mathrm{i}) + (2 - 5\mathrm{i})$
2. $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) + (-2 - \mathrm{i})$
3. $z = -\left(2 - \frac{1}{4}\mathrm{i}\right) + \left(\frac{1}{3}\mathrm{i} - 1\right)$
4. $z = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\mathrm{i}\right) - \left(\frac{2}{3}\mathrm{i} - \frac{1}{4}\right)$

**57** [Calculer.]

1. $z = (3 - \mathrm{i}\sqrt{3}) + (2\mathrm{i}\sqrt{3} - 5)$
2. $z = (2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{3}) - (3\mathrm{i}\sqrt{3} - \sqrt{2})$
3. $z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{2})$
4. $z = \left(2\sqrt{3} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$
5. $z = \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**58** [Calculer.]

1. $z = 2(1 - 3\mathrm{i}) - 3(1 - 2\mathrm{i})$
2. $z = -2(1 + \mathrm{i}) + 3(2 - \mathrm{i})$
3. $z = \frac{1}{2}(3 - \mathrm{i}) - \frac{\mathrm{i}}{3}(1 + \mathrm{i})$
4. $z = -\frac{3\mathrm{i}}{2}(1 - \mathrm{i}) - 2\mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right)$

**59** [Calculer.]

1. $z = (3 + \mathrm{i})(1 + 4\mathrm{i})$
2. $z = (2 + 3\mathrm{i})(2\mathrm{i} - 1)$
3. $z = (5 - \mathrm{i})(2 - 2\mathrm{i})$
4. $z = \left(\frac{3}{2}\mathrm{i} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\mathrm{i} - \frac{2}{3}\right)$

**60** [Calculer.]

1. $z = (3 + \mathrm{i}\sqrt{3})(2\mathrm{i}\sqrt{3} + 5)$
2. $z = (2\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3})(3\mathrm{i}\sqrt{3} - \sqrt{2})$
3. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4. $z = \left(2\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{2})$
5. $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**61** [Raisonner.]

1. Déterminer la forme algébrique des puissances suivantes du nombre $\mathrm{i}$ :

$$a = \mathrm{i}^2 \,;\, b = \mathrm{i}^3 \,;\, c = \mathrm{i}^4 \,;\, d = \mathrm{i}^5.$$

2. Soit $k$ un entier naturel. Calculer sous forme algébrique les puissances entières du nombre $\mathrm{i}$ :

$$a' = \mathrm{i}^{4k} \,;\, b' = \mathrm{i}^{4k+1} \,;\, c' = \mathrm{i}^{4k+2} \,;\, d' = \mathrm{i}^{4k+3}.$$

**62** [Calculer.]

1. **a.** Calculer le nombre complexe $z_1$ défini par :

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3.$$

**b.** En déduire le calcul de $z_2 = \mathrm{i}^{2020} + \mathrm{i}^{2021} + \mathrm{i}^{2022} + \mathrm{i}^{2023}$.

2. De manière plus générale, calculer, pour tout entier naturel $n$, $z = \mathrm{i}^n + \mathrm{i}^{n+1} + \mathrm{i}^{n+2} + \mathrm{i}^{n+3}$.

*Pour les exercices* **63** *à* **67**

Écrire les nombres complexes sous forme algébrique.

**63** [Calculer.]

1. $z = (2 + 3\mathrm{i})^2$
2. $z = (1 - \mathrm{i}\sqrt{2})^2$
3. $z = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i} - 1\right)^2$
4. $z = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2$

**64** [Calculer.]

1. $z = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
2. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
3. $z = (2\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{2})^2$

**65** [Calculer.]

1. $z=\left(3+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(3-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$
2. $z=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)$
3. $z=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $z=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$
5. $z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
6. $z=\left(\mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

**66** [Calculer.]

1. $z=(1-\mathrm{i})^3$
2. $z=\left(\frac{1}{3}-\mathrm{i}\right)^3$
3. $z=(1+2\mathrm{i})^4$
4. $z=(\sqrt{2}-\mathrm{i})^4$

**67** [Calculer.]

1. $z=(1+\mathrm{i})^5$
2. $z=(1-2\mathrm{i})^5$
3. $z=(1+\mathrm{i})^5(1-\mathrm{i})^5$
4. $z=(2+\mathrm{i})^5$
5. $z=(2-2\mathrm{i})^5$
6. $z=(2+\mathrm{i})^5(2-\mathrm{i})^5$

**68** [Raisonner.] DÉMO

Soient $u$ et $v$ deux nombres complexes.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{R}_n$ la proposition :

$$(u+v)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u^{n-p}v^p.$$

On souhaite démontrer par récurrence que la proposition $\mathrm{R}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

1. Vérifier que $\mathrm{R}_0$ est vraie.
2. Soit $k$ un entier naturel tel que $\mathrm{R}_k$ est vraie, c'est-à-dire tel que $(u+v)^k=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k-p}v^p$.

On souhaite montrer que $\mathrm{R}_{k+1}$ est vraie, autrement dit que $(u+v)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}u^{k+1-p}v^p$.

**a.** Montrer que :

$$(u+v)^{k+1}=u\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k-p}v^p+v\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k-p}v^p.$$

**b.** En déduire que :

$$(u+v)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k+1-p}v^p+\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k-p}v^{p+1}.$$

**c.** Remplacer $p$ par $p-1$ dans la deuxième somme en remarquant que si $p-1$ varie de 0 à $k$, alors $p$ varie de 1 à $k+1$. En déduire que :

$$(u+v)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{k+1-p}v^p+\sum_{p=1}^{k+1}\binom{k}{p-1}u^{k+1-p}v^p.$$

**d.** Sachant que $\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$, que $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$ et que $\binom{k+1}{p}=\binom{k}{p}+\binom{k}{p-1}$, en déduire que :

$$(u+v)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}u^{k+1-p}v^p.$$

3. Conclure.

**69** ALGO [Calculer.]

Soient $z_1=a_1+\mathrm{i}b_1$ et $z_2=a_2+\mathrm{i}b_2$ des nombres complexes où $a_1$, $b_1$, $a_2$ et $b_2$ désignent des réels.
Écrire un algorithme qui calcule la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $z_1+z_2$ lorsque l'utilisateur saisit la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1$ et de $z_2$.

**70** ALGO [Calculer.]

Soient $z_1=a_1+\mathrm{i}b_1$ et $z_2=a_2+\mathrm{i}b_2$ deux nombres complexes où $a_1$, $b_1$, $a_2$ et $b_2$ désignent des réels.
Écrire un algorithme qui calcule la partie réelle et la partie imaginaire du produit $z_1\times z_2$ lorsque l'utilisateur saisit la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1$ et de $z_2$.

*Pour les exercices* **71** *à* **73**

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

**71** VRAI / FAUX [Calculer.]

1. « $\mathrm{i}^2$ est positif. »
2. « Le produit de $1+\mathrm{i}$ par $3+3\mathrm{i}$ est égal à $6\mathrm{i}$. »
3. « Le nombre complexe $z=(2\mathrm{i}-1)^2+2(2\mathrm{i}-1)+5$ est égal à 0. »
4. « Le nombre complexe $z=(2-\mathrm{i}\sqrt{3})^2+4(2-\mathrm{i}\sqrt{3})+7$ est égal à 0. »

**72** VRAI / FAUX [Raisonner.]

1. « La partie réelle du nombre complexe $z=(2-\mathrm{i})+3\mathrm{i}(\mathrm{i}-2)$ est égale à $-1$. »
2. « Les nombres complexes $z_1=(2-\mathrm{i})+3\mathrm{i}(\mathrm{i}-2)$ et $z_2=(-2+\mathrm{i})-3\mathrm{i}(-2-\mathrm{i})$ ont des parties imaginaires opposées. »
3. « Les nombres complexes $z_1=(2+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$ et $z_2=(\mathrm{i}-2)(\mathrm{i}+3)$ ont la même partie réelle. »
4. « Le nombre complexe $z=(2+\mathrm{i})^2$ est un réel. »

**73** VRAI / FAUX [Raisonner.]

1. « Soient $a$ et $b$ deux réels. Les nombres complexes $z_1=a(a-1)+\mathrm{i}(b^2+1)$ et $z_2=a-1+2\mathrm{i}b$ sont opposés pour un unique couple $(a\,;b)$. »
2. « Quel que soit le réel $b$, le nombre complexe $z=(2+\mathrm{i}b)(2b+\mathrm{i})$ a une partie imaginaire non nulle. »
3. « Soient $a$ et $b$ deux réels. Les nombres complexes $z_1=(4a^2-a-1)+\mathrm{i}b(b-1)$ et $z_2=3a-2+\mathrm{i}(b-1)$ sont égaux pour un unique couple $(a\,;b)$. »
4. « Il n'existe pas de valeur du réel $a$ pour laquelle le nombre complexe $z=(a+\mathrm{i})^3$ est un nombre réel. »

**74** [Calculer.]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes (on écrira les solutions sous forme algébrique).

1. $8z+5\mathrm{i}=3-z+2\mathrm{i}$
2. $2\mathrm{i}+3z=\mathrm{i}(4-\mathrm{i}z)$
3. $3z+2\mathrm{i}=2\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)+1$
4. $(1+\mathrm{i})z-\mathrm{i}=(2\mathrm{i}+1)(1+\mathrm{i}z)+2$

**75** [Calculer.]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes de deux équations à deux inconnues suivants (on écrira les solutions sous forme algébrique).

1. $\begin{cases} z_1+2z_2=2-4\mathrm{i} \\ 2z_1-z_2=-1+7\mathrm{i} \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3z_1+2z_2=-4+11\mathrm{i} \\ 5z_1-z_2=-\frac{9}{2}+14\mathrm{i} \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3z_1+2z_2=\frac{3}{2} \\ 2z_1+z_2=1-\frac{1}{2}\mathrm{i} \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2z_1+3z_2=3-\mathrm{i} \\ 3z_1+5z_2=5-\mathrm{i} \end{cases}$

## 2 Nombres complexes conjugués

### Exercices FLASH

**76** Écrire sous forme algébrique le conjugué de chacun des nombres suivants.

1. $z_1=-2$
2. $z_2=-\frac{3\mathrm{i}}{4}$
3. $z_3=\mathrm{i}-2$
4. $z_4=z_1+z_2$
5. $z_5=z_2\times z_3$
6. $z_6=z_2(z_3+z_4)$

**77** Calculer chacun des nombres suivants et les écrire sous forme algébrique.

1. $z_1=\overline{10-(2+3\mathrm{i})}$
2. $z_2=\overline{(2-3\mathrm{i})(\mathrm{i}+2)}$
3. $z_3=\overline{\left(\frac{1}{2\mathrm{i}+4}\right)}$
4. $z_4=\overline{\left(\frac{\mathrm{i}+3}{1-4\mathrm{i}}\right)}$

**78** VRAI/FAUX Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« La solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $-\frac{1}{\overline{z}}=3+2\mathrm{i}$ est $-\frac{3}{13}-\frac{2}{13}\mathrm{i}$. »

**79** [Calculer.]

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres proposés.

1. $a=\overline{0}$
2. $b=\overline{\mathrm{i}}$
3. $c=\overline{-\mathrm{i}}$
4. $d=\overline{1+\mathrm{i}}$
5. $e=\overline{1-\mathrm{i}}$
6. $f=\overline{3+2\mathrm{i}}$
7. $g=\overline{\frac{1}{2}-2\mathrm{i}}$
8. $h=\overline{\frac{\sqrt{2}}{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}}$

*Pour les exercices* **80** *à* **83**

Écrire sous forme algébrique le nombre complexe donné puis déterminer la forme algébrique de son conjugué.

**80** [Calculer.]

1. $a=3(1+\mathrm{i})-2\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})$
2. $b=\sqrt{2}(1-\mathrm{i})+2\sqrt{2}\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$
3. $c=\frac{3}{2}\mathrm{i}\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)-\frac{1}{2}(2\mathrm{i}+1)$
4. $d=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}(2+\mathrm{i})$

**81** [Calculer.]

1. $a=(1+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})$
2. $b=(-1-\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$
3. $c=(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3})(-2\sqrt{2}+3\mathrm{i}\sqrt{3})$
4. $d=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

**82** [Calculer.]

1. $a=(1+\mathrm{i})^2$
2. $b=(1-\mathrm{i})^2$
3. $c=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$
4. $d=(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3})(\mathrm{i}\sqrt{3}+\sqrt{2})$

**83** [Calculer.]

1. $a=(2-\mathrm{i})^3$
2. $b=(\sqrt{2}+2\mathrm{i})^4$
3. $c=\left(2\mathrm{i}-\frac{1}{2}\right)^4$

*Pour les exercices* **84** *à* **87**

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres proposés.

**84** [Calculer.]

1. $a=\frac{1}{3\mathrm{i}}$
2. $b=\frac{1}{2+\mathrm{i}}$
3. $c=\frac{1}{2\mathrm{i}-3}$
4. $d=\frac{1}{\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$

**85** [Calculer.]

1. $a=\frac{1}{3\mathrm{i}-\sqrt{3}}$
2. $b=\frac{1}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}$
3. $c=\frac{1}{2\sqrt{2}-\mathrm{i}}$
4. $d=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}}$

**86** [Calculer.]

1. $a=\frac{3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$
2. $b=\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$
3. $c=\frac{1+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$
4. $d=\frac{2-3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$

**87** [Calculer.]

1. $a=\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2+\mathrm{i}}$
2. $b=\frac{2\mathrm{i}-\sqrt{2}}{3+\mathrm{i}}$
3. $c=\frac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1+\mathrm{i}}$
4. $d=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}}$

**88** [Raisonner.] DÉMO

Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre nombres réels et $z$ et $z'$ les nombres complexes définis par $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

**1.** Montrer que $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

**2. a.** Écrire le produit $z \times z'$ sous forme algébrique.

**b.** En déduire que $\overline{(z \times z')} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

**89** [Raisonner.] DÉMO

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes avec $z'$ non nul.

Démontrer que $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

**90** [Raisonner.] DÉMO

Soit $z$ un nombre complexe.

**1.** Pour tout entier naturel $n$, on appelle $P_n$ la proposition « $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ ».

Démontrer, par récurrence, que la proposition $P_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

**2.** On suppose $z \neq 0$ et on note $n$ un entier strictement négatif.

**a.** Exprimer $z^{-n}$ en fonction de $z^n$.

**b.** À l'aide de la question **1.**, justifier que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

**3.** Conclure.

**91** ALGO [Calculer.]

Écrire un algorithme qui calcule la partie réelle et la partie imaginaire du conjugué $\overline{z}$ de $z$ lorsque l'utilisateur saisit la partie réelle et la partie imaginaire de $z$.

**92** ALGO [Calculer.]

Écrire un algorithme qui prend en arguments la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe $z$ et qui retourne :

- « 0 n'a pas d'inverse » si $z$ est égal à 0 ;
- la partie réelle et la partie imaginaire de son inverse $\frac{1}{z}$ sinon.

**93** ALGO [Calculer.]

**1.** Écrire un algorithme qui prend en arguments les parties réelle et imaginaire de deux nombres complexes $z_1$ et $z_2$ et qui retourne :

- « le quotient n'existe pas » si $z_2$ est égal à 0 ;
- la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z_1}{z_2}$ sinon.

**2.** Implémenter cet algorithme et le tester pour $z = \frac{3-i}{4+2i}$.

*Pour les exercices* **94** *à* **97**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées. On écrira les solutions sous forme algébrique.

**94** [Calculer.]

**1.** $iz + 3(z - i) = 0$

**2.** $(4+i)z = 4 - z$

**3.** $(2i+1)z = 1 + i - 2iz$

**4.** $\frac{z+1}{z-2} = 3i$

**95** [Calculer.]

**1.** $(5+2i)\overline{z} - 2 = i$

**2.** $2i(1 - 2\overline{z}) + \overline{z} = i\overline{z} - 1$

**3.** $2i\overline{z} - i = 2(\overline{z} - 5) + i$

**4.** $\frac{\overline{z} - 2i}{\overline{z} - 1} + 1 + i = 0$

**96** [Calculer.]

**1.** $z = \frac{\overline{z}}{2}$

**2.** $z - 2 = 3i + 2\overline{z}$

**3.** $\frac{z}{i-1} - i\overline{z} = \frac{1}{i+1}$

**4.** $z \times \overline{z} = 2z - 1$

**5.** $\overline{z} - 1 = z \times \overline{z} - i$

**97** [Raisonner, Calculer.]

**1.** $z = \overline{z}$

**2.** $z = -\overline{z}$

**3.** $z = i\overline{z}$

**4.** $z = -i\overline{z}$

**5.** $z^2 = z \times \overline{z}$

**98** [Calculer.]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes de deux équations à deux inconnues suivants.

**AIDE**

On commencera par écrire le système uniquement en fonction de $z_1$ et $z_2$ et sans conjugué.

**1.** $\begin{cases} \frac{1}{2}z_1 + z_2 = 2 \\ \frac{1}{2}\overline{z_1} + i \times \overline{z_2} = 0 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} 3z_1 - 2z_2 = 4i - 2 \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 2 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} z_1 - z_2 = 3 - 4i \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 8 - i \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} 6z_1 - 3z_2 = 12 + i \\ 3\overline{z_1} - \overline{z_2} = 6 \end{cases}$

*Pour les exercices* **99** *à* **101**

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

**99** VRAI/FAUX [Calculer.]

Soient $z_1 = 1 - 3i$ et $z_2 = 2i + 3$.

**1.** « Le conjugué de la somme $z_1 + z_2$ est égal à $4 + i$. »

**2.** « Le conjugué du produit $z_1 \times z_2$ est égal à $9 - 7i$. »

**3.** « Le conjugué de $(z_1)^3$ est égal à $-26 - 18i$. »

**4.** « Le conjugué de $(z_1 \times \overline{z_2})^2$ est égal à $112 - 66i$. »

**100** VRAI/FAUX [Raisonner.]

1. « $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ est l'inverse de $1+\mathrm{i}$. »
2. « Les nombres complexes $\frac{1}{1+\mathrm{i}}$ et $\frac{1}{1-\mathrm{i}}$ ont la même partie réelle. »
3. « $\frac{4+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ est le conjugué de $1-3\mathrm{i}$. »
4. « $(1+\mathrm{i})^3$ est le conjugué de $\frac{4}{1+\mathrm{i}}$. »
5. « Le conjugué de $(1+2\mathrm{i})(2\mathrm{i}+3)$ est $(1-2\mathrm{i})(2\mathrm{i}-3)$. »
6. « Soient $z_1=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ et $z_2=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$. Alors $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ et $z_1-z_2\in\mathrm{i}\mathbb{R}$. »

**101** VRAI/FAUX [Raisonner.]

1. « Le nombre complexe $-2-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ est le conjugué de la solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{i}z-3+\mathrm{i}=(2+\mathrm{i})z+1$. »
2. « Le nombre complexe $-1-3\mathrm{i}$ est solution de l'équation $2\mathrm{i}\times\overline{z}=5(1-\mathrm{i})-\overline{z}$. »
3. « L'équation $2z-\mathrm{i}\times\overline{z}=3+\mathrm{i}+2\overline{z}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$. »
4. « Les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ vérifiant $\begin{cases}2z_1-z_2=1+3\mathrm{i}\\ \overline{z_1}+2\overline{z_2}=3+\mathrm{i}\end{cases}$ sont conjugués. »

**102** DEVOIR MAISON [Raisonner.]

Soit $z$ un nombre complexe non nul.
Indiquer pour chacun des nombres suivant, s'il s'agit d'un nombre réel ou d'un nombre imaginaire pur. Justifier.

1. $z_1=z+\overline{z}$
2. $z_2=z-\overline{z}$
3. $z_3=z^2+(\overline{z})^2$
4. $z_4=z^2-(\overline{z})^2$
5. $z_5=\frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}$ avec $z\neq\overline{z}$
6. $z_6=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}$ avec $z\neq-\overline{z}$
7. $z_7=\frac{z^2+(\overline{z})^2}{z\times\overline{z}}$
8. $z_8=\frac{z^2-(\overline{z})^2}{z\times\overline{z}}$

**103** [Démontrer.]

1. Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq0$, le nombre complexe $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.
2. Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq0$, le nombre complexe $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

**104** [Raisonner.]

Soient deux nombres complexes $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$ où $a$, $b$, $a'$ et $b'$ sont des réels vérifiant $1+zz'\neq0$.
On suppose que $a^2+b^2=1$ et $a'^2+b'^2=1$.
Montrer que le quotient $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

## 3 Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2

### Exercices FLASH

**105** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2+16=0$.

**106** Déterminer deux nombres complexes $u$ et $v$ sachant que leur somme est égale à 3 et que leur produit est égal à 5.

**107** VRAI/FAUX L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

« Les polynômes $P_1$ et $P_2$ définis sur $\mathbb{C}$ par $P_1(z)=z^3+1$ et $P_2(z)=z^3-z^2+2$ ont un facteur commun de la forme $z-a$ avec $a$ réel. »

*Pour les exercices* **108** *à* **112**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées. On écrira les solutions sous forme algébrique.

**108** [Calculer.]

1. $(z+3\mathrm{i})(2z-3+\mathrm{i})=0$
2. $(z-2\mathrm{i})(\mathrm{i}z+1)=0$
3. $(\mathrm{i}z+1+\mathrm{i})(3\mathrm{i}z-1)=0$
4. $((1+\mathrm{i})z-1)((2+\mathrm{i})z+1)=0$

**109** [Calculer.]

1. $z^2+1=0$
2. $z^2+2=0$
3. $z^2+16=0$
4. $z^2+20=0$
5. $z^2+\frac{1}{4}=0$
6. $z^2+\frac{1}{3}=0$
7. $z^2+\frac{11}{4}=0$
8. $z^2+\frac{3}{2}=0$

**110** [Calculer.]

1. $z^2+z=0$
2. $z^2+2\mathrm{i}z=0$
3. $2\mathrm{i}z^2+3z=0$
4. $(1+\mathrm{i})z^2=(2-\mathrm{i})z$
5. $(1+2\mathrm{i})z^2+(2\mathrm{i}-1)z=0$

**111** [Calculer.]

1. $z^2+z+1=0$
2. $z^2+4z+13=0$
3. $4z^2-4z+17=0$
4. $2z^2+2z+5=0$
5. $z^2-\sqrt{2}z+1=0$
6. $9z^2-6z+19=0$

**112** [Calculer.]

1. $z=-\frac{3}{z}$
2. $\frac{z}{4}=1-\frac{2}{z}$
3. $\frac{5}{z^2}=\frac{3}{z}-\frac{1}{2}$
4. $5z-2=-\frac{26}{5z}$

***Pour les exercices 113 et 114***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées. On écrira les solutions sous forme algébrique.

**113** [Calculer.]

1. $z^4+z^2-6=0$
2. $z^4+z^2-2=0$
3. $z^4+3z^2+2=0$
4. $8z^4+6z^2+1=0$
5. $8z^4+22z^2+15=0$
6. $z^3+5z+\frac{4}{z}=0$
7. $z^2+2=\frac{3}{z^2}$
8. $\frac{2}{z^4}+\frac{7}{z^2}=-3$

**114** [Calculer.]

1. $z^4-2z^2-3=0$
2. $z^4-3z^2-10=0$
3. $z^4-2z^2-8=0$
4. $2z^4-z^2-3=0$
5. $z^3-4z=\frac{21}{z}$
6. $\frac{z^3}{4}=z+\frac{3}{z}$
7. $z^5-2z=4z^3+3z$

**115** ALGO [Calculer.] LABO PYTHON

1. Écrire un algorithme en langage naturel qui retourne le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels $az^2+bz+c=0$ avec $a\neq 0$ et leurs valeurs.
2. Programmer cet algorithme en Python.

**AIDE**

On définit un nombre complexe $a+ib$ sous Python en écrivant **complex (a,b)**.

**À SAVOIR**

Python note j le nombre complexe i.

***Pour les exercices 116 et 117***

Dans chacun des cas suivants, calculer les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ dont on donne la somme $z_1+z_2$ et le produit $z_1z_2$, puis les écrire sous forme algébrique.

**116** [Calculer.]

1. $z_1+z_2=6$ et $z_1z_2=13$.
2. $z_1+z_2=10$ et $z_1z_2=26$.
3. $z_1+z_2=1$ et $z_1z_2=1$.
4. $z_1+z_2=\sqrt{2}$ et $z_1z_2=\frac{3}{4}$.

**117** [Calculer.]

1. $z_1+z_2=-1$ et $z_1z_2=\frac{5}{4}$.
2. $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$ et $z_1z_2=6$.
3. $z_1+z_2=-\sqrt{3}$ et $z_1z_2=1$.
4. $z_1+z_2=-\sqrt{2}$ et $z_1z_2=1$.

**118** [Calculer.]

Écrire chacun des polynômes à coefficients complexes suivants sous la forme $z^n-a^n$ avec $a\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, puis les factoriser par $z-a$ dans $\mathbb{C}$.

1. $P(z)=z^3+1$
2. $P(z)=z^3-8$
3. $P(z)=z^3+i$
4. $P(z)=z^3+8i$
5. $P(z)=z^5-32i$

**119** [Calculer.]

Écrire chacun des polynômes à coefficients réels suivants en produit de facteurs de la forme $z-\alpha$ avec $\alpha$ dans $\mathbb{C}$.

1. $P(z)=z^3+4z$
2. $P(z)=z^3+z^2+z+1$
3. $P(z)=z^3-2z^2+z-2$
4. $P(z)=z^5-z$
5. $P(z)=z^5+3z^3+z^2+3$
6. $P(z)=z^5-z^4+5z^3-5z^2+4z-4$

**AIDE**

Pour **5.**, remarquer que $z^5+3z^3$ se factorise par $z^3$.

**120** [Calculer.]

Soit le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^3+z^2-2.$$

1. Montrer que 1 est une racine du polynôme P.
2. Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout nombre complexe $z$, $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$.

**AIDE**

On obtient $P(z)=(z-1)(z^2+2z+2)$.

3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

**121** [Calculer.]

Soit P le polynôme à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^3-4z^2+6z-4.$$

1. Déterminer une racine réelle, notée $\alpha$, du polynôme P.
2. Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout nombre complexe $z$, $P(z)=(z-\alpha)(az^2+bz+c)$.
3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.