Chapitre 4

Fonctions de degré 3

Après le degré, nous devons aussi étudier des fonctions de degré 3 : il s'agit simplement d'ajouter un terme impliquant x^3 à ce que nous avons déjà vu.

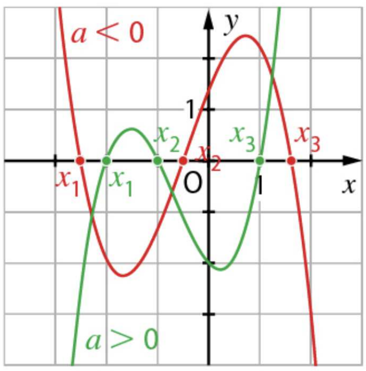
4.1 Polynômes de degré 3 et racines

Un polynôme de degré 3 est simplement une fonction comportant des puissances de x allant jusqu'à 3.

Définition 4.1.1. *Une polynôme de degré 3 est une fonction de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$ et $b, c, d \in \mathbb{R}$.*

Remarque. Lorsqu'un polynôme de degré 3 admet 3 racines x_1, x_2 et x_3 (i.e. des valeurs pour lequelles $f(x) = 0$), il se factorise en

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$



Les racines correspondent aux points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.

Voyons quelques exemples.

Exemple 4.1.1.
1. $f(x) = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 4$ est un polynôme de degré 3.
2. $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$ n'est pas un polynôme de degré 3 car il n'y a pas de termes en x^3.
3. Le polynôme $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ admet 3 racines $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$. Vérifier ceci pour x_2 et x_3. Il se factorise en $f(x) = (x+4)(x-1)(x-2)$.

Dans un premier temps, nous allons chercher à dresser le tableau de signe, par le calcul, d'un polynôme de degré 3. Pour cela, il convient de rappeler le fait suivant.

4.1.1 Tableau de signes et inéquations

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 4.1.2. Prenons la fonction $f(x) = 3x - 9$. Et dressons son tableau de signes :

1. Cherchons là ou la fonction s'annule : $f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 9 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3$.
2. Puisque $a = 3 > 0$ la fonction est croissante : elle est donc négative avant de rencontrer l'axe des abscisses et devenir positive.
3. En résumé, nous avons obtenu le tableau suivant

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $3x-9$		$-$	0	$+$	

Tout ceci peut se vérifier par le calcul en résolvant les inégalités $3x - 9 > 0$ et $3x - 9 < 0$.

Remarque. Si jamais nous avions la fonction $g(x) = -3x - 9$ nous n'aurions pas le même tableau de signe : hormis le fait que g s'annule en $x = -3$ plutôt que $x = 3$, les signes $+$ et $-$ sont échangés.

De manière générale, le résultat suivant est vérifié.

Proposition 3 (Signe de $ax + b$)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les résultat suivant donnent le signe du polynôme du premier degré $x \mapsto ax + b$.*

1. *Si $a < 0$ alors*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

2. *Si $a > 0$ alors*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

Quelques Exercices à faire sur ce thème là.

4.1.2 Signe d'un polynôme de degré 3

.
Entrainons-nous à étudier le signe d'une fonction de degré 3, donnée sous forme factorisée.

Exemple 4.1.3. Si $f(x) = 5(x+4)(x-1)(x-2)$ alors les racines sont $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$. De plus, f admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce tableau de signe est notamment pratique pour résoudre des inéquations. Par exemple,

$$f(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\infty; -4] \cup [1; 2].$$

Exercice à traiter : 110 à 114 p127 et 109 p127.

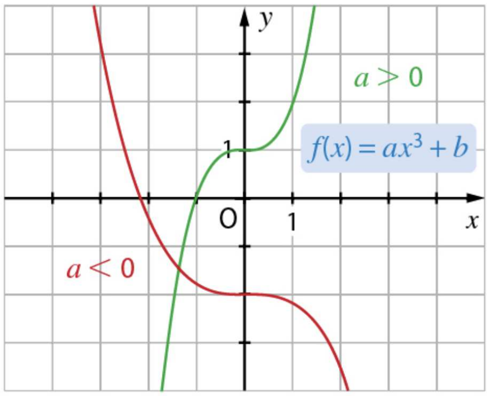
4.2 Variations d'un polynôme de degré 3

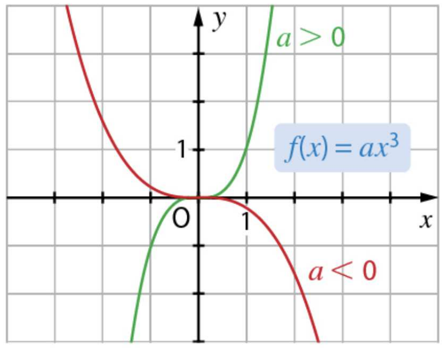
Dans cette section nous allons nous focaliser sur les polynômes de degré 3 qui s'écrivent

$$f(x) = ax^3 + b \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}.$$

Deux cas de figures se présentent à nous.

Exemple 4.2.1. Dessinons les courbes associées aux fonctions $f(x) = -0,18x^3 - 2$ et $g(x) = x^3 + 1$ (cf. figure de gauche). Procédons de même, cette fois-ci avec les fonction $h(x) = -0;18x^3$ et $t(x) = x^3$ (cf. figure de droite).





Remarque. Nous remarquons que le signe de a permet de connaitre la monotonie de la fonction (croissante ou décroissante), le nombre b indique à quelle hauteur la fonction coupe l'axe des ordonnées.

Exercices à traiter : 33 et 31 page 121 ; 104p127, 101 à 103p127.