Chapitre 3

Probabilités conditionnelles et tableaux croisés

Une Fiche sur les automatismes de seconde a été traitée pour réactiver les notions déjà rencontrées en probabilités. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer (si besoin) au cours de seconde de l'enseignant.

3.1 Dépendance et indépendance

Parfois certain évènements ont un impact sur d'autres : par exemple, qu'elle est la probabilité que vous preniez un parapluie si la météo annonce de la pluie ? De manière intuitive, le fait de savoir qu'il risque d'y avoir de la pluie va influencer notre décision de prendre un parapluie. Voyons un autre exemple, plus terre à terre.

Exemple 3.1.1. Imaginons que nous lancions un dé équilibré à 6 faces. Sachant que nous avons obtenu un nombre impair, qu'elle est la probabilité d'avoir obtenu le nombre 3. A nouveau, de manière intuitive, il est tentant de répondre : si le résultat obtenu est impair, cela ne laisse que 3 possibilités. Parmi ces possibilités, une seule correspond à la face 3. Autrement dit, la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{3}$.

Voyons de quelle manière cela peut se formaliser.

Définition 3.1.1. *Soient deux évènements A et B tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. Nous appelons probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre, noté $\mathbb{P}_A(B)$, défini par*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarque. De manière intuitive, ce nombre correspond à la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A s'est déjà réalisé. Lorsque $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, il est parfois utile d'observer que les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Le terme **fréquence** peut également être employé dans certains énoncés. Nous détaillons ceci dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 3.1.2. Nous donnons ci-dessous la répartition des 200 coureurs cyclistes engagés dans une compétition selon la tranche d'âge (moins de 25 ans ou non) et la nationalité (française ou non).

	Moins de 25 ans	25 ans ou plus	Total
Française	10	30	40
Etrangère	20	140	160
Total	30	170	200

Considérons l'évènement A : « le coureur choisi est français » et B : « le coureur choisi a moins de 25 ans ».

Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5} > 0,$$

Cette probabilité sera, de temps à autres, désignée par le terme « **fréquence marginale** ». Maintenant que $\mathbb{P}(A)$ est connue, nous pouvons calculer $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ (aussi appelée « **fréquence conditionnelle** »). Nous devons donc calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ pour déterminer la probabilité conditionnelle que le coureur ait moins de 25 ans sachant qu'il est français. Or, ici nous avons

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}.$$

Par suite, $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Remarque. Comment faire la différence entre fréquence marginale et fréquence conditionnelle ? C'est très simple :

- pour les fréquences marginales, cela consiste toujours à faire le **quotient d'un sous-total** (obtenu en bout de ligne ou en bas d'une colonne) et **de diviser par l'effectif total**. Par exemple, la fréquence marginale du caractère « moins de 25 ans »vaut

$$\frac{30}{200} = \frac{3}{20}.$$

- pour une fréquence marginale, il s'agit de faire le **quotient de l'effectif inscrit dans une case à l'intérieur du tableau de diviser par le sous total (obtenue en bout de ligne ou en bas d'une colonne) correspondant**. Ici, il n'y a pas besoin d'utiliser l'effectif total. Par exemple, la fréquence conditionnelle du caractère « 25 ans ou plus »sachant le caractère « étrangère »vaut

$$\frac{140}{160} = \frac{7}{8}.$$

Il est parfois possible de rencontrer la notion de **cardinal d'un ensemble** (noté Card). Il s'agit simplement du nombre d'éléments qui le compose ; dit autrement, il s'agit simplement de l'effectif associé à un caractère étudié. Dans ce qui précède, nous avons utilisé ceci de manière implicite. Par exemple, si F désigne l'ensemble des coureurs français, nous avons

$$\mathrm{Card}(F) = 40$$

car il y a 40 coureurs français.

Nous aurions aussi pu déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ d'une autre manière en nous restreignant à la première ligne (sachant que le coureur est français) puis en regardant le contenu de la première case (les moins de 25 ans) pour obtenir directement

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

Exercices à traiter : 15 à 18 page 174/175 ; 21 à 23 page 175 ; 24 et 26 page 176 ; 31 à 33 page 177/178 (cf. capacité 1,2, 3 page 170-171)