Chapitre 5

Suites numériques (partie 2)

5.1 Rappels

Procédons à quelques rappels afin de vous rafraîchir la mémoire :

- une suite est une collection de nombre que l'on a numéroté

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

- Pour définir une suite, deux moyen s'offrent à nous :
  1. (forme explicite) A l'aide d'une fonction : si $f(x) = 3x - 4$ alors

  $$u_1 = 3 \times 1 + 4 = 5 \quad ; \quad u_{100} = 3 \times 100 - 4 = 296 \quad ; \quad u_n = 3 \times n + 4.$$

  2. (formule de récurrence). Si la suite (u_n) modélise une augmentation de 4% et dont le premier terme vaut $u_0 = 200$ alors

  $$u_1 = 1.04 \times u_0 = 208 \quad \text{et} \quad u_2 = 1.04 \times u_1 = 216,32$$

  et, de manière générale, nous avons

  $$u_{n+1} = 1,04 \times u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n.$$

5.2 Suites arithmétiques

Dans ce chapitre, nous allons chercher à modéliser des **situations d'évolutions** à l'aide de nouveaux objets *les suites*. Dans un premier temps, nous allons nous focaliser sur des situations qui ressemblent à la suivante : Théo dépose 50 euros dans une boite tous les ans. Il commence en janvier 2001.

Exemple 5.2.1. Traitons le cas de Théo et utilisons les notations introduites dans le premier chapitre sur les suites. Au tout début, en 2000, il n'y a pas d'argent dans la boite :

$$u_0 = 0.$$

En 2001, Théo a ajouté 50 euros. Ainsi,

$$u_1 = 50.$$

En 2002, il ajoute de nouveau 50 euros donc

$$u_2 = 100.$$

Il est alors possible de poursuivre ceci. Par exemple, le terme u_{10} correspond à l'argent disponible dans la boite en 2010. Plus généralement, si n est un entier positif, u_n correspond à l'argent disponible dans la boite l'année $2000 + n$.

En faisant ainsi nous avons **construit une suite** (notée $(u_n)_{n\geq 0}$). Cela consiste simplement **à lister** l'argent disponible, d'année en année, dans la boite.

En poursuivant l'étude de l'exemple précédent, nous allons mettre en évidence la relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite.

$$u_1 = u_0 + 50 \quad ; \quad u_2 = u_1 + 50 = 100 \quad ; \quad u_3 = u_2 + 50 = 150 \quad ; \quad \ldots$$

Autrement dit, pour obtenir le terme suivant nous ajoutons toujours le même nombre $r = 50$ au terme précédent. De manière générale, pour tout entier n, cela s'écrit

$$u_{n+1} = u_n + 50.$$

Les suites vérifiant ce genre de relation de récurrence portent un nom particulier.

Définition 5.2.1 (Formule de récurrence)**.** *Soit $r \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Une suite qui vérifie la* relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout entier} \quad n$$

*est une suite **arithmétique** ; r est la **raison** de cette suite.*

Exemple 5.2.2. Dans la situation de Théo, il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r = 50$ car, pour tout entier $n \geq 0$, nous avons montré que

$$u_{n+1} = u_n + 50.$$

avec $u_0 = 0$.

Voyons d'autres exemples.

Exemple 5.2.3.

1. La suite $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16, \ldots$ semble être arithmétique de raison 5.

2. La suite (v_n) dont les premiers termes sont donnés par $v_1 = 10, v_2 = 14$ et $v_3 = 16$ ne peut-être arithmétique puisque
$$v_2 - v_1 = 4 \neq 2 = v_3 - v_2.$$

Exercices à traiter : 32,33,36,37 page 91

Il est important de savoir démontrer qu'une suite est arithmétique.

Exemple 5.2.4 (Vérifier qu'une suite est arithmétique)**.** Considérons la suite définie par $u_n = 3n - 2$ et montrons qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison 3. Pour cela, il suffit de montrer que peu importe l'indice n choisi, la différence entre deux termes consécutifs est constante. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n =& 3(n+1) - 2 - (3n - 2) \\ =& 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien montré que la suite est arithmétique de raison 3.

Exercices à traiter : 75 à 77 page 94 et 83 page 95 (cf. capacité 6 page 84 et 9 page 85).

Comme nous l'avons déjà observé, une relation de récurrence est pratique pour déterminer les termes de proche en proche mais elle est peu pratique s'il faut calculer un terme « lointain ». Par exemple, pour déterminer u_{100} il faut déjà connaitre u_{99}. Or celui-ci s'obtient à partir de u_{98} qui lui même découle de u_{97} etc.

Pour pallier à ce défaut, il est possible d'exprimer u_n directement en fonction de n à l'aide d'une formule[1].

5.3 Représentation graphique et variations d'une suite arithmétique

Nous pouvons toujours faire une représentation graphiques des suites arithmétiques : le nuage de points à l'allure d'une droite

Exemple 5.3.1. Si les premiers termes de la suite arithmétique (v_n) de raisons $r = 5$ sont donnés par

$$v_0 = -4,\ v_1 = 1,\ v_2 = 6,\ v_3 = 11, \ldots$$

Graphiquement, nous observons que le nuage de point à l'allure d'une droite pointant « vers le haut ».

Il semblerait qu'il y ait un lien assez simple reliant le signe de la raison d'une suite arithmétique et ses variations.

Proposition 4 (Monotonie d'une suite arithmétique)**.** *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors*

- *si $r > 0$ la suite est strictement croissante ;*
- *si $r < 0$ la suite est strictement décroissante ;*

1. D'habitude vous avez plutôt l'habitude de travailler avec $f(x)$ où x est la variable. Ici, avec les suites, on aura plutôt « $f(n)$ » avec n comme variable mais le principe de calcul reste le même.

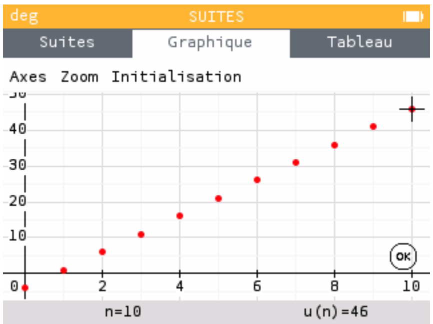

FIGURE 5.1 – Graphique associé à la suite (v_n)

- *si* $r = 0$ *la suite est constante.*

Voyons cela sur des exemples.

Exemple 5.3.2.

1. La suite arithmétique définie par $u_n = -4+5n$ pour $n \geq 0$ est croissante puisque $r = 5 > 0$.
2. La suite arithmétique définie par $u_n = 2 - 3n$ pour $n \geq 0$ est décroissante puisque $r = -3 < 0$.

Testons ceci sur de nouveaux exercices.

Exercices à traiter : 74 et 83 page 94/95 (cf. capacité 5 page 84).