Chapitre 6

Dérivation et tangentes

Dans ce chapitre nous allons aborder un nouveau moyen pour étudier les variations d'une fonction. A l'issu du programme de STMG nous seront en mesure de faire ça par le calcul, en déterminant le signe d'une fonction associée à celle faisant l'objet de notre étude. Pour aboutir à ces outils, il est nécessaire de comprendre à quoi correspond la tangente à une courbe en un point donné. Les tangentes étant des droites, il parait nécessaire de faire quelques rappels à ce sujet.

6.1 Droites du plan (rappels)

En seconde, vous avez rencontré des fonctions dite affines : $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Nous rappelons que le a est le coefficient directeur de la droite tandis que b est l'ordonnée à l'origine.

Exemple 6.1.1.

1. $f(x) = -5x + 1$ est une fonction affine $a = -5$ et $b = 1$.
2. $g(x) = -3 + x$ est une fonction affine $a = 1$ (car $f(x) = -3 + 1 \times x$ et $b = -3$.
3. $u(x) = 6$ est une fonction affine, ici $a = 0$ et $b = 6$.
4. La fonction $h(x) = -3x^2 + 6x + 1$ n'est pas une fonction affine (à cause du terme en x^2).

La représentation graphiques des fonctions affines correspond à une droite ; b correspond alors au point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées, a indique l'inclinaison de la droite (si $a > 0$, la droite « pointe » vers le haut, si $a < 0$ la droite « pointe » vers le bas).

Exemple 6.1.2. Voici un exemple de fonction affine dont le coefficient directeur est négatif. Graphiquement nous voyons que l'ordonnée à l'origine vaut $b = 2$ tandis que le coefficient directeur vaut $a = -3$.

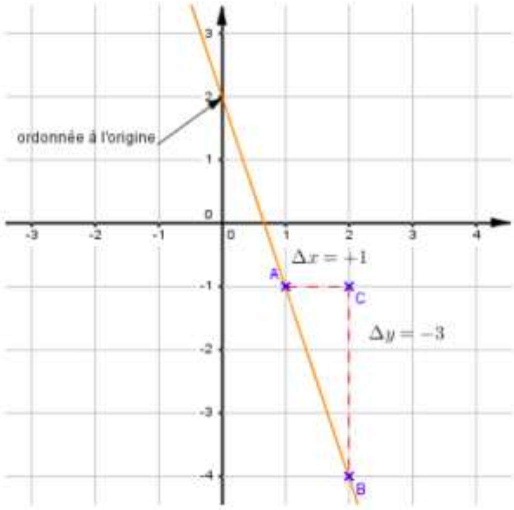


FIGURE 6.1 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x - 2$

Remarque. Nous dirons $y = 3x - 2$ est l'équation réduite de la droite associée à la fonction affine $f(x) = -3x - 2$.

Dans un premier temps, il faut être capable de retrouver les valeurs de a et b à partir d'un graphique et de dessiner une droite à partir d'une formule algébrique.

Exemple 6.1.3.

1. Si je veux tracer la droite associée à la fonction $f(x) = -3x + 2$. Je sais déjà qu'elle passe par le point de coordonnées $C(0, 2)$ grâce au coefficient b, il suffit donc de trouver un deuxième point pour ensuite les relier. Le plus simple est de choisir une valeur de x et de déterminer son image par f. Par exemple, si $x = 1$ alors $f(1) = -3 \times 1 + 2 = -1$ donc la droite passe par le point $A(1; -1)$.
2. Faisons maintenant le contraire, supposons que nous ayons à disposition le graphique ci-dessus et que nous voulons déterminer les valeurs de a et de b afin de retrouver l'expression de la fonction affine associée. Nous lisons sur l'axe des ordonnées la valeur de b : ici, $b = 2$. Pour obtenir la valeur de A, nous devons calculer **un taux d'accroissement** à partir de points se trouvant sur la droite : ici $A(1; -1)$ et $B(2; -4)$ se trouve sur la droite alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 + 1}{2 - 1} = -3.$$

Exercices à traiter : 115 à 120 page 33 ; capacité 34 à 36 page 21.

6.2 Tangentes

Définition 6.2.1. *Etant donnée une courbe $\mathcal{C}$ (obtenue à partir d'une fonction f), une tangente (en un point donné) est une droite qui ne touche la courbe qu'en un seul endroit.*

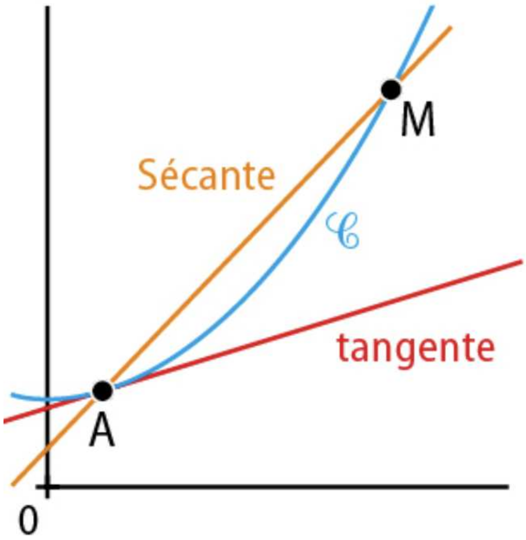


FIGURE 6.2 – Tangente au point A d'abscisse a

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est étroitement lié à la fonction f : il s'agit du nombre dérivée que nous noterons $f'(a)$ (lire f *prime* de a).

Proposition 5. *La tangente T à la courbe C au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur le nombre dérivée $f'(a)$.*

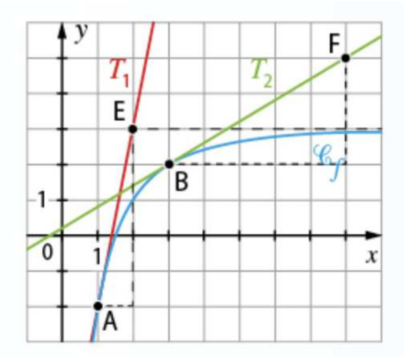
Remarque. 1. En économie, dans un contexte de coût, le nombre dérivée permet d'avoir une valeur approchée d'un coût marginal : si une entreprise fabrique des biens et que le coût de fabrication d'un bien est donnée par une fonction f. Par exemple, le coût du dixième objet fabriqué est donné par $f(10)$ alors le coût engendré par la fabrication du 11 objet (il s'agit du coup marginal) est donné (de manière approchée) par $f'(10)$. Cela permet de faire des estimations sans avoir à produire effectivement le 11ème objet.

2. Implicitement, à partir d'une fonction f nous venons de construire une nouvelle fonction f'. Cette nouvelle fonction s'appelle la dérivée de f et elle donne le coefficient directeur de la tangente en un point donné. Par exemple, $f'(2)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

3. En physique, $f'(x)$ correspond à la vitesse d'un point dont la position est donnée par $f(x)$.

Nous verrons dans un chapitre ultérieur que le signe du nombre dérivée va avoir des conséquences sur les variations de la fonction sous-jacente. Pour l'instant, nous nous limitons à un aspect graphique de la dérivation, nous traiterons ça par le calcul plus tard.

Exemple 6.2.1. Considérons la figure suivante.



1. T_1 est la tangente au point d'abscisse $a = 1$, son coefficient directeur vaut alors $f'(1)$. Par lecture graphique nous trouvons que $f'(1) = 5$. Pour cela, nous utilisons le fait que $A(1; -2) \in T_1$ et $E(2; 3) \in T_1$ donc
$$f'(1) = \frac{3 - -2}{2 - 1} = 5.$$
2. Déterminons l'équation réduite de la tangente T_2. Son coefficient directeur (correspondant à $f'(3)$ puisqu'il s'agit de la tangente à la courbe au point B d'abscisse 3) vaut $\frac{3}{5} = 0.6$ (en utilisant les coordonnées des points F et B), l'ordonnée à l'origine vaut 0.2 (environ). En conclusion l'équation réduite de T_2 est
$$y = 0.6x + 0.2$$
3. Nous pouvons tracer la tangente à C_f au point d'abscisse $a = 8$. Son équation réduite vaut alors $y = 3$ car le nombre dérivé semble nul (i.e. $f'(8) = 0$).

Exercices à traiter : 17,18 page 148 ; 35 à 38 page 150 ; 42 à 52p151.