

Chapitre 7

Dérivation et polynôme de degré 2

Depuis le début de l'année nous avons vu plusieurs méthodes pour étudier les variations d'une fonction. Faisons un bref résumé de tout cela.

7.1 Rappels

7.1.1 Variations des fonctions affines

Une fonction affine s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b$ et nous savons que **le coefficient directeur a détermine les variations de f** :

- si $a > 0$ alors la fonction est croissante (« la droite pointe vers le haut »).
- si $a < 0$ alors la fonction est décroissante (« la droite pointe vers le bas »).

Exemple 7.1.1. La fonction $f(x) = 3 - 4x$ est décroissante car $a = -4 < 0$.

7.1.2 Polynôme de degré 2 (cas particulier)

Un polynôme de degré 2 est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des coefficients. Nous avons déjà rencontré des cas particuliers de ce genre de fonction.

Lorsque f s'écrit sous la forme $f(x) = ax^2 + c$, le coefficient a (associé au terme en x^2) est celui qui décrit les variations de f .

Exemple 7.1.2. 1. Si $f(x) = -4x^2 + 5$ alors $a = -4 < 0$. La fonction est décroissante avant 0 puis croissante (la courbe à l'allure d'un « n »).

2. Si $f(x) = 8x^2 - 4$ alors $a = 8 > 0$. La fonction est croissante avant 0 puis décroissante (la courbe à l'allure d'un « u »).

Nous avons aussi rencontré des fonctions de degré 2 que nous pouvions **mettre sous forme factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1 et x_2 les racines. Lorsque c'était le cas, il était ensuite possible de déterminer les variations à l'aide d'un théorème.

Exemple 7.1.3. Soit $f(x) = 2(x-2)(x+4)$, ici $x_1 = 2$ et $x_2 = -4$. Puisque $a > 0$ la courbe à l'allure d'une « u ». Ensuite, il suffisait de déterminer $\frac{x_1+x_2}{2} = -1$ et d'évaluer la fonction en cette valeur : $f(-1) = -18$, il s'agissait du minimum de la fonction.

A présent, il est temps de trouver une méthode permettant d'étudier les variations de n'importe quelle fonction. Pour obtenir cela nous allons utiliser les tangentes que nous avons étudié dans le chapitre précédent.

7.2 Fonction dérivée

Comme nous l'avons observé, il est assez simple de déterminer le sens de variation d'une fonction affine. Nous allons utiliser ces fonctions pour comprendre ce qui se produit sur une courbe plus complexe qu'une droite. L'idée est de dessiner des tangentes à la courbe (i.e. des droites qui ne touchent la courbe qu'en un seul point) afin d'observer que le **signe du coefficient directeur**¹ associé permet de savoir si la fonction est **croissante ou décroissante**. Le point essentiel derrière ceci est que **la tangente représente un accroissement (minuscule)** de la fonction étudiée. Si cet **accroissement est positif c'est que la fonction doit augmenter et si l'accroissement est négatif c'est que la fonction devait décroître**.

Il est maintenant important de voir comment cela a lieu en pratique. Voici la méthode que nous allons mettre en oeuvre :

1. A partir de la fonction f on détermine (grâce à une série de règle) une nouvelle fonction que l'on note f' (la fonction dérivée de f).
2. La fonction f' encode les accroissements de la fonctions f , nous devons donc étudier son signe.
3. A partir de son signe, nous en déduirons que la fonction est croissante (si les accroissements sont positifs, i.e. lorsque $f'(x) > 0$) ou décroissante (si les accroissements sont négatifs, i.e. lorsque $f'(x) < 0$).
4. Il suffira enfin de résumer tout ceci dans un tableau de variation.

Voyons les règles qui vont nous permettre de déterminer cette nouvelle fonction f' .

Proposition 6 (Règles de dérivation). Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors $f'(x) = 2ax + b$.

Remarque. Plus précisément, les règles de dérivation expliquent ce qui arrive aux termes définissant la fonction :

- la dérivée de x^2 est $2x$: $(x^2)' = 2x$
- la dérivée de x est 1 : $(x)' = 1$.
- la dérivée d'une constante additive vaut 0 : $(c)' = 0$.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 7.2.1. 1. Si $f(x) = 3x - 12$ alors $f'(x) = 3$. La fonction f' est toujours positive (car $3 > 0$), la fonction est donc croissante (comme nous le savions déjà).
 2. Si $f(x) = 5x^2 + 125$ alors $f'(x) = 5 \times 2x = 10x$. La fonction dérivée est donc négative lorsque x l'est et positive sinon. Autrement dit,

1. Le nombre dérivée.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$

Nous en déduisons le tableau de variations qui suit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow f(0) = 125 \searrow$		

3. Si $f(x) = -2x^2 + 8x + 40$ alors $f'(x) = -2 \times 2x + 8 = -4x + 8$. De plus, nous avons le tableau de signes suivant (pour f')

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-4x + 8$	$+$	0	$-$

Nous en déduisons le tableau de variations qui suit :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow f(2) \searrow$		

Exercices à traiter : 54-57 et 59p152 (sauf avec des x^3 ; 79-80p53; 81 à 84p154; 91p154; 92p155 (sauf Q2); sujet p161; sujet C p162; 112p164.