

# Démocratie et mathématique (partie 1)

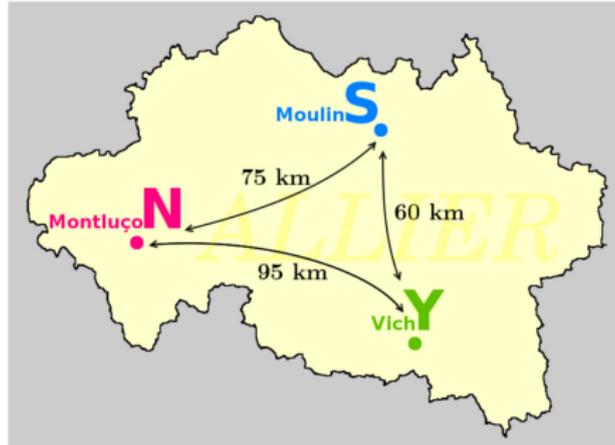
D'après des articles de R. Peyre

Qu'est ce que la volonté du peuple ?

Qu'est ce que la volonté du peuple ?

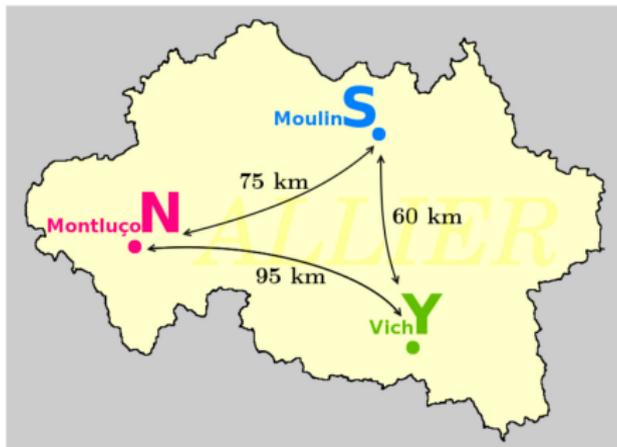
- ▶ prendre en compte les préférences **individuelles** pour trouver la préférence **collective**.

Elections démocratique pour choisir une **nouvelle capitale**.



# Choix de capitale

Elections démocratique pour choisir une **nouvelle capitale**.



Chaque habitant souhaite que la capitale soit le **plus proche** possible de son **lieu de résidence**.

## Quel type de scrutin ?

- ▶ A : Chaque électeur vote **pour** une ville, la ville avec le **plus grand nombre** de suffrages gagne.

# Quel type de scrutin ?

- ▶ *A* : Chaque électeur vote **pour** une ville, la ville avec le **plus grand nombre** de suffrages gagne.
- ▶ *B* : élection en deux tours comme l'élection présidentielle française.

# Quel type de scrutin ?

- ▶ *A* : Chaque électeur vote **pour** une ville, la ville avec le **plus grand nombre** de suffrages gagne.
- ▶ *B* : élection en deux tours comme l'élection présidentielle française.
- ▶ *C* : chaque électeur vote **contre** une ville, celle ayant **le moins de vote** gagne.

## Quel type de scrutin ?

- ▶ *A* : Chaque électeur vote **pour** une ville, la ville avec le **plus grand nombre** de suffrages gagne.
- ▶ *B* : élection en deux tours comme l'élection présidentielle française.
- ▶ *C* : chaque électeur vote **contre** une ville, celle ayant **le moins de vote** gagne.
- ▶ *D* : chaque électeur **classe** les villes par **ordre de préférence**. La première gagne 2 points, la deuxième 1 point, la dernière aucun. Celle avec **le plus de points** gagne.
- ▶ ...

Hypothèses : 40% des électeurs à  $N$ , 35% à  $Y$  et 25% à  $S$ .

- ▶  $A$  : **N** gagne avec 40% des suffrages.

Hypothèses : 40% des électeurs à  $N$ , 35% à  $Y$  et 25% à  $S$ .

- ▶  $A$  : **N** gagne avec 40% des suffrages.
- ▶  $B$  : **Y** gagne au second tour avec 60% des suffrages (elle récupère ceux de  $S$  qui préfèrent  $Y$  à  $N$ ).

Hypothèses : 40% des électeurs à  $N$ , 35% à  $Y$  et 25% à  $S$ .

- ▶  $A$  : **N gagne** avec 40% des suffrages.
- ▶  $B$  : **Y gagne** au second tour avec 60% des suffrages (elle récupère ceux de  $S$  qui préfèrent  $Y$  à  $N$ ).
- ▶  $C$  : **S gagne** avec 0% des suffrages ( $Y$  vote contre  $N$  et  $N$  contre  $Y$ ).

Hypothèses : 40% des électeurs à  $N$ , 35% à  $Y$  et 25% à  $S$ .

- ▶  $A$  : **N gagne** avec 40% des suffrages.
- ▶  $B$  : **Y gagne** au second tour avec 60% des suffrages (elle récupère ceux de  $S$  qui préfèrent  $Y$  à  $N$ ).
- ▶  $C$  : **S gagne** avec 0% des suffrages ( $Y$  vote contre  $N$  et  $N$  contre  $Y$ ).
- ▶  $D$  : **S gagne** avec une moyenne de 1,25 points par électeurs, suivi de  $Y$  avec 0,95 points et  $N$  avec 0,8 points.

Hypothèses : 40% des électeurs à  $N$ , 35% à  $Y$  et 25% à  $S$ .

- ▶  $A$  : **N gagne** avec 40% des suffrages.
- ▶  $B$  : **Y gagne** au second tour avec 60% des suffrages (elle récupère ceux de  $S$  qui préfèrent  $Y$  à  $N$ ).
- ▶  $C$  : **S gagne** avec 0% des suffrages ( $Y$  vote contre  $N$  et  $N$  contre  $Y$ ).
- ▶  $D$  : **S gagne** avec une moyenne de 1,25 points par électeurs, suivi de  $Y$  avec 0,95 points et  $N$  avec 0,8 points.
- ▶ ...

La volonté du peuple est un **concept ambigu**.

- tous les électeurs ont le **même statut** ;

- tous les électeurs ont le **même statut** ;
- tous les candidats ont le **même statut** ;

- tous les électeurs ont le **même statut** ;
- tous les candidats ont le **même statut** ;
- pas de bulletins nul (pour simplifier) ;

- tous les électeurs ont le **même statut** ;
- tous les candidats ont le **même statut** ;
- pas de bulletins nul (pour simplifier) ;
- le vainqueur de l'élection dépend uniquement de **la proportion de votants** (cela exclu des règles pas intéressantes).

## Référendum

Lorsqu'il n'y a que deux candidats/options, il est possible de montrer que le **vote majoritaire** est la **meilleure méthode**.

# Paradoxe de Condorcet (1753 – 1794)

## Référendum

Lorsqu'il n'y a que deux candidats/options, il est possible de montrer que le **vote majoritaire** est la **meilleure méthode**.

## Au moins 3 candidats

Il existe des situations où les préférences majoritaires sont **contradictoires**.

3 candidats  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

3 candidats  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

## Préférences de 60 votants

- 23 votants préfèrent :  $A > B > C$  ;
- 17 votants préfèrent :  $B > C > A$  ;
- 2 votants préfèrent :  $B > A > C$  ;
- 10 votants préfèrent :  $C > A > B$  ;
- 8 votants préfèrent :  $C > B > A$ .

3 candidats  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

## Préférences de 60 votants

- 23 votants préfèrent :  $A > B > C$  ;
- 17 votants préfèrent :  $B > C > A$  ;
- 2 votants préfèrent :  $B > A > C$  ;
- 10 votants préfèrent :  $C > A > B$  ;
- 8 votants préfèrent :  $C > B > A$ .

## Comparaisons par paire

- 33 préfèrent  $A > B$  contre 27 pour  $B > A$  ;
- 42 préfèrent  $B > C$  contre 18 pour  $C > B$  ;
- 35 préfèrent  $C > A$  contre 25 pour  $A > C$  ;

3 candidats  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

## Préférences de 60 votants

- 23 votants préfèrent :  $A > B > C$  ;
- 17 votants préfèrent :  $B > C > A$  ;
- 2 votants préfèrent :  $B > A > C$  ;
- 10 votants préfèrent :  $C > A > B$  ;
- 8 votants préfèrent :  $C > B > A$ .

## Comparaisons par paire

- 33 préfèrent  $A > B$  contre 27 pour  $B > A$  ;
- 42 préfèrent  $B > C$  contre 18 pour  $C > B$  ;
- 35 préfèrent  $C > A$  contre 25 pour  $A > C$  ;

**Contradiction** interne :  $A > B > C > A$  .

**Attribuer une note entre 0 et 20** à chaque candidat (ici en fonction de la distance).

**Attribuer une note entre 0 et 20 à chaque candidat (ici en fonction de la distance).**

Provenance de l'électeur	Note de N	Note de S	Note de Y
N	20	5	1
S	5	20	8
Y	1	8	20

*Rappel : l'électeur préfère la ville la proche de son domicile*

# Mensonges et manipulations

Problème du « **vote utile** » : modifier son vote afin d'obtenir un vainqueur qu'on préfère à celui que donnerait un suffrage sincère.

Problème du « **vote utile** » : modifier son vote afin d'obtenir un vainqueur qu'on préfère à celui que donnerait un suffrage sincère.

## Théorème de Gibbard-Satterthwaite (1973)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences ;

Problème du « **vote utile** » : modifier son vote afin d'obtenir un vainqueur qu'on préfère à celui que donnerait un suffrage sincère.

## Théorème de Gibbard-Satterthwaite (1973)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences ;
- **indépendamment de la méthode** pour désigner le vainqueur ;

Problème du « **vote utile** » : modifier son vote afin d'obtenir un vainqueur qu'on préfère à celui que donnerait un suffrage sincère.

## Théorème de Gibbard-Satterthwaite (1973)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences ;
- **indépendamment de la méthode** pour désigner le vainqueur ;
- il y a **plus de 3 candidats**.

Alors on peut trouver une situation où certains électeurs ont **intérêt de mentir**.

Problème du « **vote utile** » : modifier son vote afin d'obtenir un vainqueur qu'on préfère à celui que donnerait un suffrage sincère.

## Théorème de Gibbard-Satterthwaite (1973)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences ;
- **indépendamment de la méthode** pour désigner le vainqueur ;
- il y a **plus de 3 candidats**.

Alors on peut trouver une situation où certains électeurs ont **intérêt de mentir**.

Remarque : ceci est faux s'il n'y a que 2 candidats.

Problème du « **vote utile** » : modifier son vote afin d'obtenir un vainqueur qu'on préfère à celui que donnerait un suffrage sincère.

## Théorème de Gibbard-Satterthwaite (1973)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences ;
- **indépendamment de la méthode** pour désigner le vainqueur ;
- il y a **plus de 3 candidats**.

Alors on peut trouver une situation où certains électeurs ont **intérêt de mentir**.

Remarque : ceci est faux s'il n'y a que 2 candidats.

Solution ?

Introduire le **hasard** : une fois les bulletins remplis, on les mélange et on tire l'un d'entre eux au hasard pour déterminer le vainqueur.

Introduire le **hasard** : une fois les bulletins remplis, on les mélange et on tire l'un d'entre eux au hasard pour déterminer le vainqueur.

## Critère d'unanimité

Un candidat ne peut gagner si tous les électeurs lui préfèrent quelqu'un d'autre

Introduire le **hasard** : une fois les bulletins remplis, on les mélange et on tire l'un d'entre eux au hasard pour déterminer le vainqueur.

## Critère d'unanimité

Un candidat ne peut gagner si tous les électeurs lui préfèrent quelqu'un d'autre

## Robustesse

Dans ce genre de scrutin, les électeurs ont **intérêt** d'exprimer leur **véritable opinion**.

# Un peu d'aléa

Introduire le **hasard** : une fois les bulletins remplis, on les mélange et on tire l'un d'entre eux au hasard pour déterminer le vainqueur.

## Critère d'unanimité

Un candidat ne peut gagner si tous les électeurs lui préfèrent quelqu'un d'autre

## Robustesse

Dans ce genre de scrutin, les électeurs ont **intérêt** d'exprimer leur **véritable opinion**.

**Problème** : il se peut qu'un candidat **gagne** alors qu'il **déplait** à la grande **majorité**.

## Théorème de Gibbard (1977)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences + éventuel **tirage au sort** ;

## Théorème de Gibbard (1977)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences + éventuel **tirage au sort** ;
- critère d'unanimité doit être vérifié et **robustesse au mensonge** ;

## Théorème de Gibbard (1977)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences + éventuel **tirage au sort** ;
- critère d'unanimité doit être vérifié et **robustesse au mensonge** ;
- il y a au moins 3 candidats.

## Théorème de Gibbard (1977)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences + éventuel **tirage au sort** ;
- critère d'unanimité doit être vérifié et **robustesse au mensonge** ;
- il y a au moins 3 candidats.

Alors on tombe forcément la méthode de **scrutin avec tirage au sort**.

## Théorème de Gibbard (1977)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences + éventuel **tirage au sort** ;
- critère d'unanimité doit être vérifié et **robustesse au mensonge** ;
- il y a au moins 3 candidats.

Alors on tombe forcément la méthode de **scrutin avec tirage au sort**.

**La méthode parfaite n'existe pas.**

## Théorème de Gibbard (1977)

Si

- Mode de suffrage : **classement** des préférences + éventuel **tirage au sort** ;
- critère d'unanimité doit être vérifié et **robustesse au mensonge** ;
- il y a au moins 3 candidats.

Alors on tombe forcément la méthode de **scrutin avec tirage au sort**.

**La méthode parfaite n'existe pas.**

Méthode **aussi parfaite que possible** ? Qui ne vérifie pas tous les critères souhaitables mais le plus grand nombre possible ?

À suivre.