Chapitre 1

Suites

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons chercher à modéliser des **situations d'évolutions** à l'aide de nouveaux objets *les suites*. Pour faire simple, nous allons apprendre à faire la différence entre les deux cas de figures suivants :

- Théo dépose 50 euros dans une boite tous les ans. Il commence en janvier 2001.
- Lola dépose 50 euros sur son livret A en 2000 (en janvier) ; les intérêts de ce compte bancaire s'élèvent à 1% par an et sont ajoutés en janvier sur le livret A.

Pour mieux saisir ce qui se produit, nous allons devoir choisir des **notations** pour y voir plus clair. Le plus simple semble être de **numéroter** les sommes disponibles chaque année. Faisons le d'abord pour Théo. Au tout début, en 2000, il n'y a pas d'argent dans la boite :

$$u_0 = 0.$$

En 2001, Théo a ajouté 50 euros. Ainsi,

$$u_1 = 50.$$

En 2002, il ajoute de nouveau 50 euros donc

$$u_2 = 100.$$

Il est alors possible de poursuivre ceci. Par exemple, le terme u_{10} correspond à l'argent disponible dans la boite en 2010. Plus généralement, si n est un entier positif, u_n correspond à l'argent disponible dans la boite l'année $2000 + n$.

En faisant ainsi nous avons **construit une suite** (notée $(u_n)_{n\geq 0}$). Cela consiste simplement **à lister** l'argent disponible, d'année en année, dans la boite.

Vocabulaire :

- u_0 est le premier **terme** de la suite (celui par lequel la liste débute).
- u_{10} est le onzième [1] terme de la liste .
- u_n est le **terme général** de la liste.

Dans les exemples précédents (ceux associés à Théo et Lola), il existe une **relation entre un terme et celui qui le suit**. Lorsque la relation n'est pas trop complexe, elle permet d'obtenir beaucoup d'informations sur la suite.

1.2 Suites arithmétiques et modèle linéaire

Reprenons l'exemple de Théo pour déterminer une relation entre les différents termes de la suite. Nous voyons que

$$u_1 = u_0 + 50 \quad ; \quad u_2 = u_1 + 50 = 100 \quad ; \quad u_3 = u_2 + 50 = 150 \quad ; \quad \ldots$$

Autrement dit, pour obtenir le terme suivant nous ajoutons toujours le même nombre $r = 50$ au terme précédent. De manière générale, pour tout entier n, cela s'écrit

$$u_{n+1} = u_n + 50.$$

Ce genre de relation entre deux termes consécutifs est appelée une **relation de récurrence**. Ceci mène à la définition suivante.

Définition 1.2.1 (Formule de récurrence)**.** *Soit $r \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Une suite qui vérifie la* relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \textit{pour tout entier} \quad n$$

*est une suite **arithmétique** ; r est la **raison** de cette suite.*

Exemple 1.2.1. Dans la situation de Théo, il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r = 50$ car, pour tout entier $n \geq 0$, nous avons montré que

$$u_{n+1} = u_n + 50.$$

avec $u_0 = 0$.

Exercices à traiter : 1 à 3.

Remarque. La relation de récurrence des suites arithmétiques est pratique pour déterminer les termes de proche en proche mais elle est peu pratique s'il faut calculer un terme « lointain ». Par exemple, pour déterminer u_{100} il faut déjà connaitre u_{99}. Or celui-ci s'obtient à partir de u_{98} qui lui même découle de u_{97} etc.

Pour pallier à ce défaut, il est possible d'exprimer u_n directement en fonction de n à l'aide d'une formule [2].

1. puisque nous commençons à compter à partir de 0.
2. D'habitude vous avez plutôt l'habitude de travailler avec $f(x)$ où x est la variable. Ici, avec les suites, on aura plutôt « $f(n)$ » avec n comme variable mais le principe de calcul reste le même.

Proposition 1 (Formule explicite)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une* ***suite arithmétique de raison*** $r \in \mathbb{R}$ ***et de premier terme*** u_0*. Alors, pour tout entier* n*,*

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Remarque. Supposons que $r = 50$ et $u_0 = 1$. Si on souhaite calculer u_{100}, il suffit de remplacer n par 100 dans la formule précédente :

$$u_{100} = 1 + 100 \times 50 = \dots$$

Il n'y a plus besoin de calculer les termes précédents.

Exercices à traiter : 4 et 5.

1.2.1 Représentation graphique et régression linéaire

Si nous avons à disposition une suite[3] arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$, il est possible de représenter les termes de la suite à l'aide d'un graphique. Contrairement au cas des fonctions, nous aurons seulement un **nuage de points** et non une courbe.

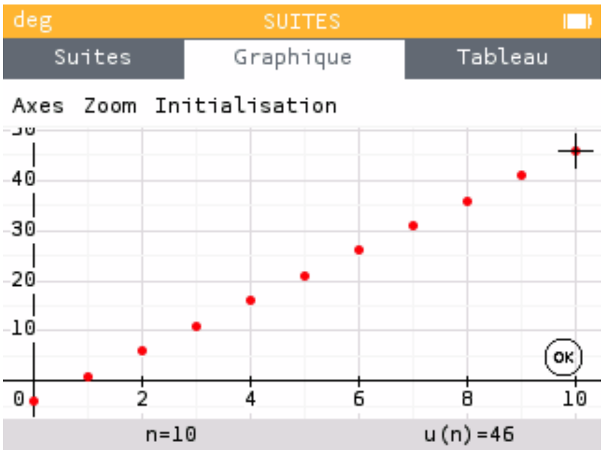

FIGURE 1.1: Représentation graphique d'une suite arithmétique de raison $r > 0$

Remarque.

1. Les suites arithmétiques sont toujours représentées par une suite de **points alignés, suggérant une droite** qui pointe vers le haut ou vers le bas.
2. La droite suggérée pointe vers le haut si $r > 0$ tandis qu'elle pointera vers le bas si $r < 0$.
3. Par analogie avec les fonctions, dans le **cas des suites arithmétiques**, nous dirons que la suite est
   - **croissante si** $r > 0$ (les valeurs de la suite augmentent lorsque n augmente).

3. Cette observation reste valable pour n'importe quelle type de suite, le nuage de points prendra alors une forme différente

- **décroissante si** $r < 0$ (les valeurs de la suite diminuent lorsque n augmente).

Exercice à traiter : 6.

L'alignement théorique de ces points est malheureusement impossible à obtenir en pratique et il ne semble pas fructueux d'utiliser les suites arithmétiques pour modéliser ce genre de situation (même si elles s'en rapprochent beaucoup).

Exemple 1.2.2. Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population en France métropolitaine de 1946 à 2013

Année	1946	1954	1962	1968	1975	1982	1990	1999	2006	2013
Rang x_i	0	8	16	22	29	36	44	53	60	67
Population en millions y_i	40,5	42,8	46,5	49,8	52,7	54,3	56 ,6	58,2	61,4	63,7

Source INED ined.fr

Si nous plaçons tous ces points (à l'aide de leurs coordonnées $(x_i; y_i)$) dans un repère orthonormé, nous constatons qu'ils sont presque alignés[4]. Il semble alors possible de tracer **une droite passant au plus proche** de tous ces points :

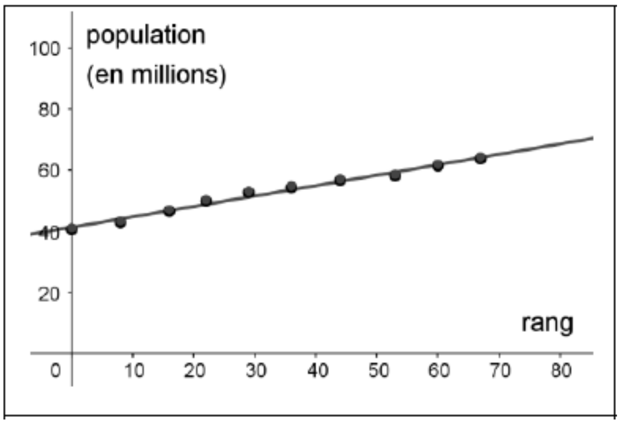

FIGURE 1.2: La droite obtenue est appelée *droite de régression linéaire*

Comme cela a été vu en seconde, toute droite coupant l'axe des ordonnées admet une équation de la forme

$$y = ax + b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

4. Si le nuage de points ne présente pas de forme « allongée » cela n'a pas d'intérêt d'utiliser une droite pour modéliser la situation.

Notre objectif va être de déterminer les valeurs de a et b. Pour cela, nous allons utiliser la calculatrice qui va faire le travail[5] à notre place. Un tutoriel résumant la manipulation à retenir est présenté ici :

https://www.youtube.com/watch?v=lC1lfgYE51s&list=PLVUDmbpupCapZdNo8QaVDkWz3eqneIYK1&index=36

Concernant notre exemple, nous trouvons

$$a = 0,341 \quad \text{et} \quad b = 41,21.$$

Ainsi, l'équation de la droite de régression s'écrit

$$y = 0,341x + 41,21.$$

Cette nouvelle formule est utile pour **faire des prédictions**[6]. Par exemple, si nous voulons estimer à l'aide de celle-ci la population en 2020 (dont le rang est le 74ème), il nous suffit de calculer

$$y = 0,341 \times 74 + 41,21 \approx 66,4.$$

Autrement dit, notre modèle nous assure qu'il devrait y avoir $66,4$ millions d'habitants en France en 2020.

Exercice à traiter : 7.

1.3 Suite géométrique et modèle exponentiel

1.3.1 Rappels

Rappelons un point concernant les évolutions.

Proposition 2 (Evolutions et coefficients multiplicateurs)**.** *Rappelons les deux faits suivants :*

- *Augmenter une quantité de $t\%$ revient à la **multiplier** par* $(1+\frac{t}{100})$.
- *Diminuer une quantité de $t\%$ revient à la **multiplier** par* $(1-\frac{t}{100})$.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 1.3.1. **Augmenter** un nombre de 5%, c'est le multiplier par

$$1+\frac{5}{100} = 1,05.$$

De même, **diminuer** une quantité de 20%, c'est la multiplier par

$$1-\frac{20}{100} = 0,8.$$

5. L'équation de la droite est obtenue à l'aide de la méthode des « moindres carrés »
6. La pertinence de l'utilisation de cette droite est quantifiée par la valeur r (appelé coefficient de corrélation) donnée par la calculatrice : plus r est proche de 1 ou de -1 plus nos prédictions sont pertinentes ; ce nombre r n'a aucun rapport avec la raison d'une suite arithmétique.

1.3.2 Suites géométriques

Revenons à présent sur l'exemple de Lola qui dépose, en 2000, 50 euros sur son livret A dont les intérêts annuels s'élèvent à 1% par an. Cela signifie que chaque année l'argent disponible sur son compte augmente de $t = 1\%$. Si nous souhaitons modéliser l'argent disponible sur son livret A en $2000 + n$ par une suite $(u_n)_{n\geq 0}$, il parait naturel d'imposer $u_0 = 50$ (argent placé initialement) puis de calculer les termes suivants grâce à l'augmentation de 1%. Autrement dit, en 2001 nous aurons

$$u_1 = u_0 \times (1+\frac{1}{100}) = 50 \times 1,01 = 50,5.$$

Par suite, en 2002, nous aurons

$$u_2 = u_1 \times 1,01 = 51,005$$

et ainsi de suite[7]. En observant attentivement, nous constatons que le terme suivant s'obtient systématiquement **en multipliant** le terme précédent par $q = 1,01$. De manière générale, pour tout entier n, nous avons alors

$$u_{n+1} = u_n \times 1,01.$$

Cette nouvelle relation de récurrence donne lieu à un type de suites particulières.

Définition 1.3.1 (Formule de récurrence)**.** *Soient $q \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Une suite qui vérifie la* relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad \text{pour tout entier} \quad n$$

*est une suite **géométrique** ; q est la **raison** de cette suite.*

Exemple 1.3.2. Dans le cas de Lola, nous avons exhibé une suite géométrique de raison $q = 1,01$ et de premier terme $u_0 = 50$.

La formule de récurrence précédente comporte le même défaut que pour les suites arithmétiques (nécessité de connaitre les termes précédents pour calculer le suivant). Pour palier à cela, il est possible d'obtenir une formule explicite.

Proposition 3 (Formule explicite)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une **suite géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}$ **et de premier terme** u_0. Alors, pour tout entier n,*

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Exemple 1.3.3. Si Lola désire connaitre sa fortune en 2060, en supposant qu'elle n'ajoute pas d'argent sur le livret A, il lui suffit d'appliquer la formule précédente avec $q = 1,01$, $u_0 = 50$ et $n = 60$.

1.3.3 Représentation graphique

Si nous avons à disposition une suite[8] géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$, il est de nouveau possible de représenter les termes de la suite à l'aide d'un graphique.

---

7. Nous admettons que $51,005$ euros est une quantité qui a du sens

8. Cette observation reste valable pour n'importe quelle type de suite, le nuage de points prendra alors une forme différente

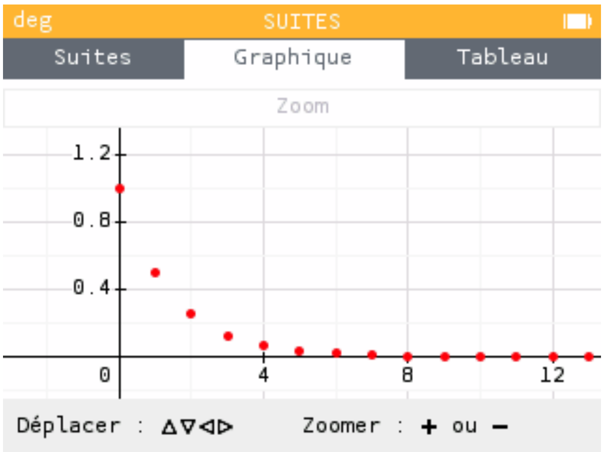

FIGURE 1.3: Représentation graphique d'une suite arithmétique de raison $0 < q < 1$ avec $u_0 > 0$

Remarque.

1. Dans ce cours, les suites géométrique sont toujours représentées par une suite de points s'envolant vers l'infini ou allant s'écraser vers l'axe des abscisses. La forme du nuage de points peut évoquer l'un des côtés de la tour Eiffel (quitte à tourner le graphique de 45 degrés) ; on parle de modèle **exponentiel**.
2. Le nuage de points se **dirige vers** 0 **si** $0 < q < 1$ tandis qu'il partira vers **l'infini si** $q > 1$.
3. Par analogie avec les fonctions, dans le cas de suites géométriques dont **le premier terme** u_0 **est positif**, nous dirons que la suite est

   - **croissante si** $q > 1$ (les valeurs de la suite augmentent lorsque n augmente).
   - **décroissante si** $0 < q < 1$ (les valeurs de la suite diminuent lorsque n augmente).

Exercices à traiter : 8 à 10.