Binôme de Newton et applications

Débutons par quelques rappels concernant les sommes : étant donnée une suite (u_n), il arrive fréquemment que nous ayons à additionner ses termes jusqu'à un rang donné N : $u_1 + u_2 + \ldots + u_N$.

Exemple 0.10. Pour fixer les idées, nous pouvons imaginons que u_1 corresponde aux nombres de personnes ayant réservés une place pour la scène ouverte du lycée le jour 1, u_2 correspondant au nombre associé le jour 2,.... Si les réservations s'arrêtent au 10ième jour (i.e. $N = 10$) nous voulons calculer

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$$

Pour alléger les notations, les sommes ci-dessus seront notées $\sum_{k=1}^{N} u_k$. Nous dirons que k est l'indice de sommation, sa première valeur correspond au nombre en dessous du symbole Σ, sa dernière valeur étant le nombre placé au dessus. Cet indice est muet : $\sum_{l=1}^{N} u_l = \sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{n=1}^{N} u_n$.

Il est souvent utile de procéder à des changements d'indices dans une somme afin de déterminer sa valeur.

Exemple 0.11. Si $q \neq 1$, nous savons d'après le cours du lycée que $\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$. Comment faire pour déterminer sans encombre la somme suivante :

$$\sum_{k=2}^{N} q^{k-2} \quad ?$$

Pour cela, vous avez déjà vu qu'il était possible de procéder à un changement d'indice pour décaler notre numérotation. Posons $l = k - 2$ dans ce cas, si $k = 2$ alors $l = 0$ et si $k = N$ alors $l = N - 2$. Notre somme devient alors

$$\sum_{k=2}^{N} q^{k-2} = \sum_{l=0}^{N-2} q^l = \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q}.$$

A vous de faire.

Exercice 19.

1. Calculer $\sum_{k=1}^{N+1} q^{k-2}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. *Indication :* $\cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)$ *où* $\mathrm{Re}(z)$ *est la partie réelle d'un nombre complexe.*
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} k \sin(kx)$ à partir des idées qui précèdent.

Les identités remarquables ont toujours jouées un rôle essentiel en mathématiques car elles permettent de factoriser des expressions algébriques (rendant plus simple une étude de signe par exemple). Comme vous l'avez vu cette année la formule du binôme de Newton est une généralisation de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. La démonstration présentée ci-dessous est à comprendre et à connaître car elle peut faire partie d'une question de cours lors d'une interrogation orale en CPGE. Volontairement, tout n'est pas explicité dans la démonstration afin que vous réfléchissiez et que vous vous questionniez en travaillant la preuve de ce résultat.

Proposition 1 (Binôme de Newton)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et appelons $P(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : si $n = 0$, l'égalité est triviale.
- Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $P(n+1)$ l'est également.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{(HR)}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + b^{n+1}
\end{aligned}$$

Dans la première somme, posons $j = k+1 \iff k = j-1$, cela donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

or $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ donc

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

i.e. $P(n+1)$ est vérifiée. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

A vous de chercher à utiliser le binôme de Newton pour calculer certaines sommes.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots \binom{n}{n}$.
2. $\underbrace{1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n-1}}_{n \text{ termes}}$.

Le binôme peut également être utile pour obtenir des inégalités.

Exercice 21. 1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \sqrt{n}.$$

Indication : utiliser la formule du binôme de Newton combinée avec une minoration.

2. En déduire la limite, lorsque $n \to +\infty$, de

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

3. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ êtes vous capables de démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^n = +\infty \quad ?$$

Voyons à présent des applications du binôme de Newton en probabilités.

Proposition 2 (Espérance Loi Binomiale)**.** *Si $X \sim B(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ alors*

$$\mathbb{E}[X] = np.$$

Démonstration. Par définition de l'espérance et en utilisant l'expression de la loi de X,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \quad np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Posons alors $j = k - 1$, cela entraine que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] \quad &= \quad np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j} \\
&= \quad np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \\
&= \quad np(p + 1 - p)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

où, dans l'avant dernière égalité, nous avons utilisé la formule du binôme de Newton. $\square$

Forcément, il semble tentant de chercher à démontrer, via les mêmes arguments, que si $X \sim B(n,p)$ alors $\mathrm{Var}(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Que se passe-t-il si vous essayer ?

Nous rappelons que la formule de Koenig-Huygens indique que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - E[X]^2$ et que $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k)$; nous invitons par ailleurs le lecteur à démontrer la formule de Koenig-Huygens en partant du fait que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big]$.

Visiblement, cela ne marche pas aussi bien que nous l'aimerions. Cherchons à voir comment obtenir une autre méthode, plus souple, qui permettrait de déterminer à la fois l'espérance et la variance d'une loi binomiale. C'est le contenu du Lemme suivant.

Lemme 3. *Soient $q, x \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{N}^*$ alors*

1. $\sum_{k=0}^{l} k\binom{l}{k} x^{k-1} q^{l-k} = l(x+q)^{l-1}$
2. $\sum_{k=1}^{l} k(k-1)\binom{l}{k} x^{k-2} q^{l-k} = l(l-1)(x+q)^{l-2}$.

Démonstration. D'après la formule du binôme, nous avons $(x+q)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} x^k q^{l-k}$. Il suffit ensuite de dériver le membre de gauche et le membre de droite pour obtenir

$$l(x+q)^{l-1} \sum_{k=0}^{l} k \binom{l}{k} x^{k-1} q^{l-k}$$

et de dériver une seconde fois pour obtenir la deuxième égalité. □

Voyons ce que cela permet d'obtenir dans le contexte des lois binomiales.

Exercice 22. Soient $n \in \mathbb{N}_*$ et $p \in [0,1]$ ainsi que $X \sim B(n,p)$.

1. Démontrer que $\mathbb{E}[X] = n \times p$. *Indication : utiliser le Lemme précédent en choisissant convenablement une valeur de l, q et x.*
2. A partir de ce qui précède, démontrer que $\mathrm{Var}(X) = \sqrt{np(1-p)}$. *Indication : utiliser le Lemme pour déterminer* $\mathbb{E}[X^2]$.