Chapitre 10

Fonction logarithme

10.1 Introduction

Certains éléments chimiques (carbon 14, césium 137, uranium 235, ...) possèdent un noyau instable. Cela signifie qu'il y a un déséquilibre entre le nombre de protons, de neutrons et d'électrons. Pour résoudre ce problème de stabilité, l'élément chimique va chercher à se transformer pour retrouver une situation d'équilibre : ce phénomène porte le nom de *radioactivité*. Différents types de radioactivités existent ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$), grossièrement le noyau se trouve avec un surplus de nucléons ou d'électrons et va chercher à s'en débarrasser. De fait, cela implique que le **nombre de noyau** $N(t)$ d'un échantillon de matière radioactive **diminue** au cours du temps. Mathématiquement, $N(t)$ est donné par la formule

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{pour tout} \quad t \geqslant 0$$

avec N_0 le nombre initial de noyaux et $\lambda > 0$ la constante de radioactivité associée à l'élément étudié. Supposons qu'il y ait $N_0 = 1\,000$ au début de l'expérience, combien de temps faut-il à l'échantillon radioactif pour n'avoir plus que $\frac{N_0}{2} = 500$ noyaux ? Répondre à cette question revient à résoudre l'équation suivante :

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}.$$

Nous devons donc trouver un moyen de se **débarrasser de l'exponentielle** pour trouver la valeur de t (solution de l'équation précédente). Pour cela nous allons étudier une nouvelle fonction appelée ***logarithme népérien***[1].

10.2 Définition et propriétés algébriques

Définition 10.2.1. *La fonction logarithme $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il s'agit de l'unique fonction continue vérifiant*

$$\ln\left(e^x\right) = x \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad e^{\ln x} = x \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

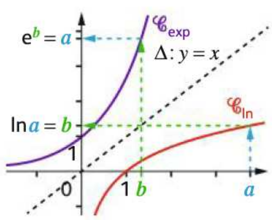

FIGURE 10.1 – $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont des fonctions réciproques.

1. Les physiciens lui préfèrent le logarithme décimale, $x \mapsto \log_{10}(x)$ définit par $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Cette fonction vérifie des propriétés semblables à celles du logarithme népérien et le choix de renormalisation simplifie certaines d'entre elles. Par exemple, $\log_{10}(10^9) = 9$ alors que $\ln(10^9) = 9\ln(10)$. Ce genre de fonctions intervient, par exemples, dans l'étude du PH ou les décibels

Remarque. Il est important d'avoir en tête que **la fonction logarithme permet de « défaire » ce qu'à fait la fonction exponentielle** (un peu comme $x \mapsto \sqrt{x}$ avec $x \mapsto x^2$). Ses propriétés sont alors réciproques de celles de la fonction exponentielle. Ceci s'observe, dans un premier temps sur les ensembles de définitions et leurs images : $x \mapsto e^x$ allait de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ tandis que la fonction $x \mapsto \ln x$ fait le contraire.

Voyons à présent quelques conséquences de la définition.

1. Puisque $e^0 = 1$ nous en déduisons que $\ln(1) = 0$.
2. Contrairement à l'exponentielle, la **fonction logarithme n'est pas de signe constant !**

Exemple 10.2.1. Nous pouvons à présent résoudre des équations impliquant l'exponentielle en toute généralité.

1. $2e^x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left(e^x\right) = \ln\frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2}$.
2. $4\ln x + 16 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\ln x} = e^{-4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^{-4}$.

Il est également possible de résoudre des équations impliquant $x \mapsto \ln x$ grâce à la fonction exponentielle.

$$2\ln x - 12 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^6.$$

Remarque. En particulier, le temps de demi-vie en radioactivité (dont nous avons parlé dans l'introduction), noté $t_{1/2}$, est donné par

$$t_{1/2} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-\lambda}.$$

Exercices à traiter : (sauf les inégalités) 1 page 173 et 4 page 173, 2 et 5 page 173 à faire à la maison ; Exercices d'entrainements : 29 à 35 page 184 (Méthode 1 page 173) ; 36 à 38 page 184 (Méthode 2 page 173).

Abordons à présent les propriétés algébriques satisfaites par cette nouvelle fonction.

10.3 Propriétés algébriques

Vous avez déjà constaté l'année passée que l'exponentielle vérifiait un grand nombre de propriétés algébriques, puisque $x \mapsto \ln x$ est la fonction réciproque de $x \mapsto e^x$, elle va vérifier des propriétés similaires (lues en « sens inverse »).

Proposition 60. *La fonction logarithme vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout* $x, y \in]0, +\infty[$,
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$
En particulier, pour tout $x \in]0, +\infty[$ *et* $y \in \mathbb{R}$, *nous avons*
$$\ln(x^y) = y\ln(x).$$
- *Pour tout* $x, y \in]0, +\infty[$,
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$$

Remarque.

1. La fonction logarithme transforme donc **les multiplications en additions** et **les divisions en soustractions**.
2. En particulier, la dernière propriété entraine que, pour tout $y > 0$,
$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$$
3. Il se trouve que la deuxième formule fonctionne aussi pour la racine carré d'un nombre. En effet, si $x > 0$, nous avons
$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{d'où} \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x).$$

Voyons sur quelques exemples.

Exemple 10.3.1.

1. $\ln(4e) = \ln(4) + \ln(e) = \ln(4) + 1$.
2. $\ln\frac{1}{2} + \ln 2 = \ln\frac{1}{2} \times 2 = \ln 1 = 0$.

3. $\ln(2^3) = 3\ln 2$.
4. Pour tout $x \in]1; +\infty[$, simplifier $\ln(x-1) + \ln(x+1)$.
5. Simplifier $\ln(36) - \ln(9)$.
6. Pour tout $a > 0$, simplifier l'expression $\ln(a^7) + 2\ln(a^{-3})$.
7. Simplifier $\frac{\ln(\sqrt{5}-1)+\ln(\sqrt{5}+1)}{2}$.

Exercices à traiter : 5 page 175, 6 page page 175 à faire à la maison. Exercices d'entrainement : 39 à 45 page 184 (Méthode 3 page 175).

10.4 Variations et dérivées

Tout comme pour l'exponentielle, il parait important de connaitre les variations de la fonction $x \mapsto \ln x$ et de savoir dériver cette nouvelle fonction.

Proposition 61. *La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \textit{pour tout} \quad x > 0.$$

En particulier, $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante et nous avons le tableau de variation suivant

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Remarque. Voici quelques remarques concernant la fonction $x \mapsto \ln x$.

1. En calculant $(\ln x)''$ le lecteur constatera que $x \mapsto \ln x$ est une fonction concave sur $]0; +\infty[$. En conséquence, pour tout $x, y > 0$, nous avons
$$\ln(x) \leqslant \ln(y) + \frac{1}{y}(x-y).$$
En particulier, si $y = 1$, nous avons $\ln(x) \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$.
2. Le lecteur pourra vérifier que l'équation de la tangente à la courbe (associée à $x \mapsto \ln(x)$) au point d'abscisse 1 est donnée par $y = x$.

Voyons quelles sont conséquences de la monotonie de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ quant à la résolution d'équations et d'inéquations.

10.4.1 Equations et inéquations

Nous avions déjà observé, d'un point de vue formel, ce qui se produisait dans le cas d'équations impliquant le logarithme. Le résultat précédent nous donne une justification rigoureuse de ce nous avions déjà mis en oeuvre en début de chapitre et nous indique également ce qui se produit dans le cas d'inéquations.

Proposition 62. *Pour tout $x, y > 0$, les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. $\ln x < \ln y \iff x < y$.
2. $\ln x = \ln y \iff x = y$.

Remarque. En particulier, puisque $\ln(1) = 0$ nous avons

$$\ln x \geqslant 0 \iff x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \ln x < 0 \iff x \in]0, 1[.$$

Autrement dit, il est possible de résumer dans un tableau le signe de $\ln x$ sur $]0; +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	

Ceci permet de résoudre de nombreuses inéquations.

Exemple 10.4.1. 1. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $-3e^x + 6 < 0$, nous avons

$$-3e^x + 6 < 0 \iff e^x > 2 \iff \ln(e^x) > \ln(2) \iff x > \ln 2.$$

Le sens de l'inégalité est conservée lorsque nous appliquons $x \mapsto \ln x$ car il s'agit d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résolvons $3 - 2\ln x \geqslant 0$ sur $]0; +\infty[$, nous avons

$$3 - 2\ln x \geqslant 0 \iff \frac{3}{2} \geqslant \ln x \iff e^{\frac{3}{2}} \geqslant e^{\ln x} \iff e^{\frac{3}{2}} \geqslant x.$$

Nous invitons le lecteur à être précautionneux lors des résolutions : il est important de faire attention au domaine de définition de $x \mapsto \ln x$: **nécessairement**, $x > 0$. Il convient donc d'établir le domaine de définition avant de chercher à employer les propriétés décrites dans la proposition 62. Voyons cela sur deux exemples.

Exemple 10.4.2. 1. Résolvons l'équation $(E_1) : \ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln 2$.

(a) Tout d'abord, déterminons l'ensemble de résolution (lié aux domaines de définition des fonctions impliquées). Ici, nous devons avoir

$$x - 1 > 0 \quad \text{et} \quad x - 2 > 0 \iff x > 1 \quad \text{et} \quad x > 2.$$

Ainsi, la résolution s'effectue sur l'ensemble $]2; +\infty[$.

(b) Grâce aux propriétés du logarithme, nous voyons que

$$(E) \iff \ln\big[(x-1)(x-2)\big] = \ln(2)$$

d'où, grâce à la proposition 62, nous en déduisons que

$$(x-1)(x-2) = 2 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0 \iff x \in \mathcal{S} = \{0; 3\}.$$

2. Résoudre l'équation $(E_2) : \ln(x-1) + \ln(x-2) \leqslant \ln 2$.

Exercices à traiter : (uniquement les inégalités) 1 page 173 et 4 page 173, 2 et 5 page 173 à faire à la maison ; Exercices d'entrainements : 29 à 35 page 184 (Méthode 1 page 173) ; 36 à 38 page 184 (Méthode 2 page 173).

Les propriétés du logarithme nous permettent aussi d'avoir un regard nouveau sur la résolution de problèmes impliquant un seuil (avec les suites ou avec la loi binomiale). Voyons cela sur un exemple.

Exemple 10.4.3. 1. Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $3^n > 10\,000$. Pour cela, il suffit d'utiliser la fonction $x \mapsto \ln(x)$ (qui est croissante). Ainsi, nous avons

$$\ln(3^n) > \ln(10^4) \iff n\ln(3) > 4\ln(10) \iff n > \frac{4\ln(10)}{\ln 3} \approx 8.38\ldots.$$

Donc $n = 9$.

2. Nous estimons que le nombre de poissons d'un lac diminue de 5% par an. Cette population est actuellement estimée à $50\,000$ poissons. Notons u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, le nombre de poissons dans le lac dans n années ; ainsi $u_0 = 50\,000$.

(a) Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

(c) La fonction ci-dessous, écrite en langage Python, a pour paramètre un nombre k et renvoie le nombre d'années minimum au bout duquel le nombre de poissons dans le lac est strictement supérieur à k. Compléter ce programme.

```
def Seuil(k):
    n=0
    u=50000
    while □:
        n=□
        u=□
    return n
```

(d) Saisir ce programme et l'exécuter avec $k = 20\,000$.

(e) Retrouver le résultat de la question précédente en résolvant une inéquation. *Indication : utiliser la forme explicite de la suite* (u_n).

Exercices à traiter : 7 page 175, 8 page 175 à faire à la maison. Exercices d'entrainements : 46 à 48 page 184 (Méthode 4 page 175).

Voyons à présent ce qui se produit si nous cherchons à dériver des fonctions impliquant le logarithme afin d'étudier leurs variations sur le domaine de définition associé.

Exemple 10.4.4. 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 3\ln(x) + x - 5$. Par suite, $D_f =]0;+\infty[$ et f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, nous avons

$$f'(x) = \frac{3}{x} + 1.$$

2. Soit g la fonction $g(x) = (\ln x)^2$. Par suite, $D_g =]0;+\infty[$ et g est dérivable $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. En outre, pour tout $x > 0$, nous avons

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}.$$

Exercices à traiter : 11 page 177 et 53 page 185 ; 12 page 177 à faire la maison. Exercices d'entrainements : 52 à 56 page 185 (cf. méthode 6 page 177).

10.4.2 Limites et croissances comparées

Bien que la représentation graphique de la fonction logarithme nous permettent de conjecturer la valeur des limites au bord du domaine de définition, il est nécessaire d'énoncer un résultat attestant ceci.

Proposition 63. *La fonction $x \mapsto \ln(x)$ admet les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Il est alors nécessaire de savoir comparer le logarithme avec les puissances de x afin de savoir ce qui ce produit lorsque certaines formes indéterminées apparaissent.

Proposition 64 (Croissances comparées)**.** *Les résultats suivants sont satisfaits : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x^n\to 0^+} x\ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0.$$

Remarque. Autrement dit, cette proposition nous affirme que la fonction logarithme est négligeable face aux puissances de x en 0 ou en $+\infty$.

Démonstration. Nous ne traiterons que les deux premiers résultats lorsque $n = 1$.

1. Démontrons que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Pour cela, posons $X = \ln(x) \iff x = e^X$ d'où $x \to +\infty \iff X \to +\infty$. Ainsi,
$$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}.$$
Par croissance comparées, nous savons que $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ d'où le résultat en passant à l'inverse.
2. Procédons de la même manière en posant $X = \ln(x) \iff x = e^X$ d'où $x \to 0 \iff X \to -\infty$. De plus,
$$x\ln(x) = e^X X$$
et cette quantité tend vers 0 lorsque $X \to -\infty$ par croissances comparées.

$\square$

Voyons quelques exemples d'application de ceci.

Exemple 10.4.5. 1. Soit $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$. Déterminer les limites au bord du domaine de définition.
2. Déterminer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$
Indication : procéder à un changement de variable et penser à la définition du nombre dérivée.

Exercices à traiter : 13 et 14 page 179 ; Etude complète : 63 page 186. Exercices d'entrainements : 57 à 60 page 185 (cf. méthode 7 page 179) ; Etude complète : 64 et 67 page 186.

10.5 Logarithme et fonctions composées

A de nombreuses reprises, nous devrons étudier des fonctions de la forme $x \mapsto \ln\big[u(x)\big]$ avec $u : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle. Pour que cette composition fasse sens, il est impératif que
$$u(x) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in I.$$
Voyons cela sur des exemples.

Exemple 10.5.1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.
1. $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$.
2. $g(x) = \ln(5 - x)$.
3. $h(x) = \ln(x^2 + x - 2)$.

Evidemment, pour étudier des fonctions de la forme $x \mapsto \ln\big[u(x)\big]$, nous aurons besoin d'une nouvelle formule de dérivation.

Proposition 65. *Si $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto \ln u(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*
$$\big(\ln u(x)\big)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \tag{10.5.1}$$
En guise d'entrainement, traitons un exemple.

Exemple 10.5.2. Etudions la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.
1. Posons $u(x) = x^2 + 1$. Puisque $\Delta = -4 < 0$ alors $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (puisque $u(x)$ est du signe de $a = 1 > 0$). La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminons f'. Pour cela, nous observons que
$$u(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad u'(x) = 2x.$$
Par suite, grâce à (10.5.1), nous savons que
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Pour étudier le signe de $f'(x)$, il suffit d'observer que celui-ci est déterminer par le signe du numérateur. Autrement dit,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier les limites au bord du domaine de définition. L'étude aurait pu se poursuivre en déterminant l'équation d'une tangente T à C_f en un point donné pour ensuite étudier la position relative de C_f par rapport à T.

Exercices à traiter : 15 et 16 page 179 ; Exercices d'entrainements : 61 et 62 page 185 (cf. méthode 8 page 179) ; Etude complète :73 et 74 page 188 ; 79 page 189 (logarithme et suites) ou 80 page 189 (exercice plus élaboré avec des suites) ; 87 page 190 ou 108 page 195 (logarithme, suites et probabilité).

10.6 Puissances irrationnelles (pour aller plus loin)

L'objet de cette section est de généraliser la fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ à des exposants n'étant pas forcément des nombres entiers (relatifs). Par exemple, nous allons donner un sens à

$$x^{\sqrt{2}}.$$

Définition 10.6.1. *Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, nous considérons la fonction $x \mapsto f_\alpha(x)$ définie sur $]0;+\infty[$ par*

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}.$$

Remarque. Le lecteur remarquera que $e^{b \ln a} = a^b$. Ainsi, l'utilisation de l'exponentielle et du logarithme permettent de généraliser la notion de puissance.

Nous proposons ci-dessous une étude de cette famille de fonctions.

1. A quoi correspondent, en termes de fonctions usuelles, les fonctions f_0 et f_1 ?
2. Nous supposons à présent que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. Montrer que f_α est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

3. Supposons que $\alpha < 0$.
   (a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f_α.
   (c) Tracer, sur un même graphique, les courbes représentatives C_{f_α} lorsque $\alpha = -1$ et lorsque $\alpha = -\frac{1}{2}$.
4. Supposons que $\alpha > 0$.
   (a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f_α.
   (c) Définissons h_α comme étant la fonction définie par

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{si} \quad x > 0; \\ 0 \quad \text{si} & x = 0. \end{cases}$$

   Montrer que h_α est continue en 0.
   (d) Etudier la dérivabilité de h_α en 0. *Indication : procéder à une disjonction de cas suivant que $0 < \alpha < 1$ ou $\alpha > 1$.*
   (e) Ajouter au précédent graphique (celui de la question **2c.**), les courbes C_α lorsque $\alpha = 0.2$ et lorsque $\alpha = 2$.