Exploration de différents thèmes

Partie 1 : manipuler des sommes

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ par $u_n = \frac{1}{n}$. Nous pourrions être amener à calculer la somme des 10 premiers termes (par exemple) :

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10}$$

Il faut avouer que c'est déjà un peu pénible à écrire. C'est pourquoi nous pouvons utiliser une notation pour condenser ceci et éviter d'employer les ... qui manquent de rigueur :

$$S = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}.$$

Cela signifie que nous additionnons les termes $\frac{1}{k}$ en débutant par $k = 1$ puis en augmentant, de un en un, la valeur de k pour s'arrêter lorsque $k = 10$.

Remarque. L'indice de sommation est muet : si nous remplaçons k par une autre lettre, le résultat de la somme est inchangé :

$$\sum_{k=1}^{10} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_{10} = \sum_{i=1}^{10} u_i$$

Il convient de savoir manipuler et de simplifier ces sommes.

Exemple 0.1.

1. $\sum_{k=1}^{5} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$. Pour chaque valeur de k (compris entre 1 et 5) nous devons ajouter 2. Autrement dit, de manière générale si n est un entier non nul et $a \in \mathbb{R}$ alors
$$\sum_{k=1}^{n} a = a \times n$$
où n correspond le nombre de termes dans la somme. [1]
2. Dans la somme des termes d'une suite arithmétique, nous rencontrons souvent la quantité suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
3. Si $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, dans la somme des termes d'une suite géométrique nous rencontrons souvent la quantité
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. Nous aurions donc $\sum_{k=0}^{n} a = a \sum_{k=0}^{n} 1 = a(n+1)$.

4. Traitons $S = \sum_{k=2}^{n} 5 \times 3^{k-1} + 6$. Par linéarité de la somme nous avons

$$S = \sum_{k=2}^{n} 5 \times 3^{k-1} + \sum_{k=2}^{n} 6 = 5 \times \sum_{k=2}^{n} 3^{k-1} + 6 \times \sum_{k=2}^{n} 1.$$

   La deuxième somme vaut simplement $6(n-2)$, il reste maintenant à déterminer $\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1}$ qui ressemble fortement à une somme de termes d'une suite géométrique. Pour s'y ramener, nous allons procéder à un changement d'indice (une renumérotation) pour que la somme commence à 0 plutôt qu'à deux. A cet effet, posons

$$j = k - 2.$$

   Voyons quel impact cela a sur les bornes de la somme : lorsque $k = 2$ alors $j = 0$ et lorsque $k = n$ alors $j = n - 2$. De plus, $j = k - 2 \iff k = j + 2$. C'est pourquoi

$$\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-2} 3^{j+2-1} = \sum_{j=0}^{n-2} 3^{j+1} = 3\sum_{j=0}^{n-2} 3^{j} = 3 \times \frac{1 - 3^{n-1}}{1 - 3} = -\frac{3}{2}(1 - 3^{n-1}).$$

   En résumé, $S = -\frac{15}{2}(1 - 3^{n-1}) + 6(n + 1)$.

Remarque. Nous invitons les lecteurs à vérifier qu'ils sont en mesure d'établir les assertions 2 et 3 par récurrence.

A vous de manipuler des sommes. .

Exercice 1. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^{n} e^{-2k} \quad ; \quad B = \sum_{k=2}^{n} k + 2 \quad ; \quad C = \sum_{k=1}^{n} x^{3k+1} \quad ; \quad D = \sum_{k=n}^{2n+1} 1$$

et

$$E = \sum_{k=n+1}^{n^2} k \quad ; \quad F = \sum_{k=n}^{2n} k + 5 \quad ; \quad G = \sum_{k=2}^{n} 2^{k+1}$$

Exercice 2. Considérons sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Donner une autre expression de $f(x)$ sans le symbole somme.
2. Dériver $f(x)$ suivant ses deux expressions.
3. En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ en fonction de x et n.
4. Application : calculer, en fonction de n, les sommes

$$A = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} \quad ; \quad B = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{3^j}.$$

5. A l'aide de ce qui précède, déterminer $C = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)4^{k-3}$.