Chapitre 1

Rappels sur les suites

Soit $I \subset \mathbb{N}$, les suites $u : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$ font parties de fonctions les plus simples à étudier. Ceci provient du fait que l'espace de départ est discret (inclus dans $\mathbb{N}$) contrairement à ce qui se produit lors de l'étude d'une fonction $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$; ici, $D \subset \mathbb{R}$ est un intervalle (ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}$). Procédons à présents quelques rappels sur les suites.

1.1 Rappels

Débutons par les notations que nous utiliserons :

- une suite sera notée (u_n). Il est possible de préciser ceci : si $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ désigne une suite dont le premier terme est u_p.
- u_n est le terme général de la suite.

Pour construire ou définir une suite, deux approches sont envisageables :

1. l'une s'effectue **à l'aide d'une fonction** ; ce cas de figure ressemble beaucoup à ce qui se produit lors de l'étude d'une fonction $x \mapsto f(x)$ sauf qu'au lieu d'avoir $x \in \mathbb{R}$, la variable est un entier naturel $n \in \mathbb{N}$.
2. l'autre repose sur une **formule de récurrence** qui explique comment déterminer le terme suivant u_{n+1} à partir du précédent[1] u_n et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les termes de la suite sont alors obtenus les uns après les autres, de proche en proche.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 1.1.1. 1. (Formule explicite), si $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$ pour tout $n \geqslant 0$, nous avons alors

$$u_0 = \frac{3 \times 0 + 2}{0 + 4} = \frac{1}{2} \quad ; u_1 = \frac{3 \times 1 + 2}{1 + 4} = 1 \quad ; \quad \ldots$$

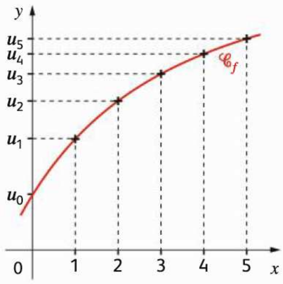
2. (Formule de récurrence), si $u_0 = 0.24$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$ pour tout $n \geqslant 0$, les calculs se font de proche en proche à partir du terme précédent :

$$u_1 = \frac{3 \times u_0 + 2}{u_0 + 4} = \frac{3 \times 0.24 + 2}{0.24 + 4} \approx 0.6415 \quad ; \quad u_2 = \frac{3 \times u_1 + 2}{u_1 + 4} = \ldots$$

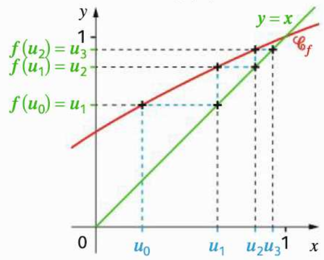
Remarque. Graphiquement, nous représentons les suites de la manière suivante :

1. Parfois, nous rencontrerons des suites récurrentes d'ordre supérieur : par exemple, pour déterminer u_{n+1}, il est nécessaire de connaitre u_n et u_{n-1}. Ceci se généralise en impliquant autant de termes que nous le souhaitons.

<table>
<tr><th>Suite définie explicitement</th><th>Suite définie par récurrence</th></tr>
<tr><td>
Pour tout entier naturel n :
$\boldsymbol{u_n = f(n)}$ où f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$
Exemple : on considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{3n+2}{n+4} = f(n)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{3x+2}{x+4}$ définie sur $]-4;+\infty[$.



</td><td>
$\boldsymbol{u_0}$ est donné (ou u_p pour $p \geqslant 0$) et, pour tout entier naturel n :
$\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$ où f est une fonction
Exemple : on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}24$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} = f(u_n)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{3x+2}{x+4}$ définie sur $]-4;+\infty[$.



</td></tr>
</table>

Notons en passant que la représentation graphique d'une suite définie par récurrence est légèrement moins simple à obtenir que celle d'une suite définie explicitement : il faut utiliser la droite d'équation $y = x$ à chaque étape[2].

De manière générale, il est compliqué (parfois même impossible) d'obtenir une formule explicite pour une suite définie par récurrence. Ceci entraine que l'utilisation de la calculatrice est un moyen commode pour déterminer des termes lointain. Nous rappelons ci-dessous comment procéder avec une calculatrice TI :

https://www.youtube.com/watch?v=D5OAi2_h_bw&list=PLVUDmbpupCapZdNo8QaVDkWz3eqneIYK1&index=21

Challenge 1. Nous invitons à le lecteur à proposer une méthode alternative, à implémenter sur machine, utilisant le langage python, permettant de calculer le $n^{ième}$ terme d'une suite définie par récurrence.

Indication : utilisez une boucle for.

Exercices à traiter : Exercices 1 et 2.

Comme pour les fonctions, il est naturel de chercher à déterminer les variations d'une suite (u_n).

1.2 Sens de variation d'une suite

Commençons par rappeler la définition.

Définition 1.2.1. *Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0 0}$ une suite numérique, une telle suite sera dite :*

- *croissante (à partir de l'indice n_0) si,* ***pour tout*** *entier $n \geqslant n_0$*
$$u_{n+1} \geqslant u_n.$$
- *décroissante (à partir de l'indice n_0) si,* ***pour tout*** *entier $n \geqslant n_0$,*
$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Remarque. Vocabulaire : une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**. Notons en passant qu'il est possible d'exhiber des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes. Par exemple, la suite $u_n = n(-1)^n$ avec $n \geqslant 0$ n'est pas monotone puisque $u_1 < u_0$ et $u_2 > u_1$.

Lors de l'étude d'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$, **le signe de la dérivée** permet facilement de **déterminer les variations** de la fonction f. Dans le cas des suites, les choses sont beaucoup plus simples. En reformulant

2. Sur l'image de droite, cela revient à partir de la valeur u_0 sur l'axe des abscisses pour déterminer son image u_1 grâce à la courbe $\mathcal{C}_f$ pour ensuite reporter cette valeur sur l'axe de abscisses via la droite d'équation $y = x$; il suffit ensuite d'itérer ce procédé.

la définition 1.2.1, nous obtenons un critère pratique pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$: il suffit de **déterminer le signe** de

$$u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0.$$

En effet, ceci découle des faits suivants :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$. Autrement dit u_n est une suite croissante.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$. Autrement dit u_n est une suite décroissante.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 1.2.1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie (de manière explicite) par

$$u_n = \frac{n-1}{n+2} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calculons quelques valeurs pour conjecturer le sens de variation de la suite.

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad u_1 = 0 \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{4}$$

Puisque $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2$, il **semblerait** que la suite soit croissante. Vérifions cela en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+2} - \frac{n-1}{n+2} = \ldots = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0.$$

En résumé, $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est croissante.

Remarque. Puisque la suite est définie, pour tout $n \geqslant 0$, par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ Nous aurions pu aussi établir que f est une fonction croissante[3] sur $\mathbb{R}_+$ pour en déduire que (u_n) est également croissante.

Attention : cet argument n'est pas valable pour des suites définies par récurrence. Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ mais la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0$$

n'est clairement pas croissante.

Exercice à traiter : Exercice 12 (Qa, Qb, Qc).

Entrainement supplémentaire : étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$ pour tout $n \geqslant 0$, faire de même avec la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $w_n = 3n^2$ pour tout $n \geqslant 0$.

1.2.1 Critère alternatif pour des termes strictement positifs

Sous certaines conditions, il est possible de formuler différemment la définition 1.2.1 pour se ramener à l'étude de quotient. Lorsque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est possible d'étudier **le rapport**[4]

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

afin de voir s'il est **est supérieur ou inférieur à** 1. Ceci repose sur l'observation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$. Autrement dit u_n est une suite croissante.
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$. Autrement dit u_n est une suite décroissante.

Remarque. Notons au passage que tous les calculs présentés ci-dessus sont visiblement moins complexes que ceux permettant de déterminer une dérivée et d'étudier son signe.

3. En observant par exemple que $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pour $x \neq 2$ ou en étudiant le signe de f' sur $\mathbb{R}_+$.
4. Plutôt que la différence $u_{n+1} - u_n$.

Ce critère alternatif est **très efficace pour les suites définie par des puissances** (les suites géométriques par exemple).

Exemple 1.2.2. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n = 2^{3n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Il n'est pas difficile de montrer que $v_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$ (il s'agit de puissances de 2). Par suite,

$$v_{n+1} = 2^{3(n+1)+1} = 2^{3n+4}$$

donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{3n+4}}{2^{3n+1}} = 2^{3n+4-3n-1} = 2^3 = 8 \geqslant 1.$$

En conséquence, la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Exercice à traiter : terminer l'exercice 12.

Entrainement supplémentaire : étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \frac{1}{3^n}$.

1.3 Suites arithmétiques et géométriques

L'année passée vous avez rencontré des suites particulières dont la définition par récurrence était particulièrement simple. Il s'agissait des suites dites

1. **arithmétique** lorsqu'on **ajoute toujours la même valeur** $r \in \mathbb{R}$ pour passer d'un terme au suivant ;
2. **géométrique** lorsqu'on **multiplie toujours par la même valeur** $q \in \mathbb{R}$ pour passer d'un terme au suivant.

Remarque. r ou q sont appelées *raison* de la suite.

Les principales propriétés de ce genre de suites sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	Suite arithmétique (raison r, 1er terme u_0)	**Suite géométrique** (raison q, 1er terme u_0)
Définition (par récurrence)	Pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$	Pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q}$
Expression explicite (où $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$)	Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r$	Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_p \times q^{n-p}$
Sens de variation	• Si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante. • Si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante. • Si $r = 0$, (u_n) est constante.	• Si $0 < q < 1$ et si $u_0 > 0$ (resp. $u_0 < 0$), (u_n) est strictement décroissante (resp. strictement croissante). • Si $q = 0$ ou $q = 1$, (u_n) est constante. • Si $q < 0$, (u_n) n'est pas monotone.

Exercices à traiter : Exercices 3 à 8 ainsi que l'exercice 14.

Il est parfois possible de mélanger ces deux procédés[5].

Exemple 1.3.1 (Suite arithmético-géométrique). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et

$$u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer u_1, u_2.
2. Démontrer que la suite est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont la raison sera à préciser.
   (b) En déduire, pour tout $n \geqslant 0$, une formule explicite de v_n.
   (c) A l'aide de ce qui précède, donner une formule explicite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la suite (u_n).

5. ce genre de suite interviendra dans de nombreux exercices types bac

Remarque. A posteriori, comment faire pour trouver la valeur à retrancher ou ajouter (ici, il s'agissait du nombre 3) à la suite (u_n) afin d'obtenir une nouvelle suite (v_n) qui sera géométrique ?

Pour faire cela, nous cherchons à déterminer un point fixe : c'est-à-dire une solution de $x = 2x - 3 \iff x = 3$. La terminologie provient du fait que si $u_0 = 3$ alors $u_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite n'évolue plus. L'obtention de cette valeur permet facilement de démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2. Pour cela, il suffit de faire la différence des égalités

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 3 \\ 3 &= 2 \times 3 - 3. \end{aligned}$$

Ceci mène directement (après une factorisation par 2 à $u_{n+1} - 3 = 2(u_n - 3) \iff v_{n+1} = 2v_n$.

Exercices à traiter : Exercice 15

Etant donné une suite $(u_)$, il est parfois nécessaire de déterminer la valeur de la somme des premiers termes :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \quad ?$$

Dans certains cas, ce résultat est simple à obtenir.

Proposition 1 (Sommes partielles)**.** *Pour tout $n \geqslant 0$, nous avons*

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

où $q \neq 1$.

Remarque. Le premier résultat s'obtient en additionnant termes à termes $1+2+\ldots+n$ avec $n+(n-1)+\ldots+2+1$ et en divisant par 2.

Le second s'obtient comme suit : si $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ alors $qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$. Dans ce cas,

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il reste ensuite à factoriser le membre de gauche par S_n pour ensuite diviser l'égalité par $1 - q$ (à condition que $q \neq 1$) afin d'obtenir l'identité voulue. Nous verrons plus tard dans l'année une méthode alternative pour établir ceci.

Exercices à traiter : exercices 9 à 11.

1.4 Majorants et minorants

Il est temps d'aborder quelques nouveautés qui nous seront utiles plus tard dans l'année dans le cadre de l'étude de convergence de suites.

En mathématiques, il est parfois bien délicat, voir impossible, de tout calculer explicitement. La plupart du temps, les objets mis en jeu sont trop complexes et le mathématicien doit se résoudre à faire des estimations, les plus précises possibles, en procédant à **des majorations ou des minorations** de la quantité étudiée. Voyons ce que cela donne concernant les suites.

Définition 1.4.1. *Soit (u_n) une suite et $n_0 \in \mathbb{N}$.*

1. *la suite est **majorée** par $M \in \mathbb{R}$ à partir du rang n_0 si*

$$u_n \leqslant M \quad \textit{pour tout} \quad n \geqslant n_0.$$

2. *la suite est **minorée** par $m \in \mathbb{R}$ à partir du rang n_0 si*

$$u_n \geqslant m \quad \textit{pour tout} \quad n \geqslant n_0.$$

3. *Une suite est dite bornée si elle est minorée et majorée.*

Remarque. Autrement dit, cela revient à déterminer (lorsqu'elles existent) des valeurs qu'une suite ne dépassera jamais.

Voyons cela sur des exemples.

Exemple 1.4.1.
1. La suite $u_n = n^2$ est minorée (mais non majorée) par 0 pour tout $n \geqslant 0$.
2. La suite $v_n = \frac{1}{n+1}$ est majorée par 1 pour tout $n \geqslant 0$; elle est aussi minorée par 0.
3. La suite $w_n = (-1)^n$ est bornée pour tout $n \geqslant 0$.
4. La suite $h_n = n(-1)^n$ est ni majorée, ni minorée.
5. La suite $\cos(n)$ est majorée par 1 et minorée par -1 pour tout $n \in \mathbb{N}$[6]. C'est aussi le cas pour la suite $\sin(n)$.

Remarque. Comme nous pouvons le constater, il existe tous les cas de figures : borné, seulement majoré ou minoré, ni l'un ni l'autre.

Voyons un autre exemple.

Exemple 1.4.2. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que la suite $u_n = \frac{2n+1}{3n-1}$ est majorée par $\frac{3}{2}$. Pour établir ceci, il suffit de montrer que $u_n - \frac{3}{2} \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si c'est le cas, nous aurons alors que $u_n \leqslant \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or,

$$\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{3}{2} = \frac{4n+2}{2(3n-1)} - \frac{9n-3}{2(3n-1)} = \frac{-5n+5}{2(3n-1)} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La conclusion s'ensuit puisque le nouveau quotient est bien négatif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. En fait, ce principe est à garder en tête : pour établir qu'une valeur a est un minorant ou un majorant d'une suite (u_n), il suffit d'étudier le signe de $u_n - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour ensuite conclure.

Exercice à traiter : exercice 13. Proposer ensuite une suite majorée mais non minorée.

6. Ceci reste vrai si nous remplaçons $n \in \mathbb{N}$ par $x \in \mathbb{R}$