Chapitre 13

Primitives et équations différentielles

13.1 Equations différentielles, une introduction

La plupart du temps dans votre scolarité, vous avez cherché à **résoudre des équations polynomiales**. Par exemple, vous deviez mettre en oeuvre différentes méthodes pour résoudre (i.e. déterminer la valeur de x vérifiant une égalité donnée) des équations de la forme :

$$3x - 2 = 0 \quad ; \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad ; \quad \ldots$$

Ce genre de résolution a notamment permit de résoudre des problèmes géométriques, l'étude de la monotonie d'une fonction,.... Dans ce chapitre, nous allons aborder un autre genre d'équation. Cette fois-ci l'inconnue n'est plus un nombre réel x mais **une fonction** f vérifiant une équation impliquant sa dérivée. Voyons sur un exemple.

Exemple 13.1.1. Supposons que $f(t)$ désigne la quantité (en mL) d'un médicament présent dans le sang d'un patient à l'instant $t \geqslant 0$. Une étude du processus d'élimination de médicament permet de montrer que la vitesse d'élimination $f'(t)$ est proportionnelle à la quantité présente dans le sang (pour un rapport de -10%). Autrement dit, f vérifie la relation

$$(E) \; : \; f'(t) = -0,1 \times f(t) \quad \text{pour tout} \quad t \geqslant 0.$$

La relation précédente est désignée sous le nom **d'équation différentielle**.

Pour la résoudre nous devons **trouver toutes les fonctions** f **définies sur l'intervalle** $I = [0; +\infty[$ **qui vérifient la relation** (E)**.** Parfois, **une condition initiale** sera également imposée (par exemple, il y a $0,3mL$ du médicament dans le sang du patient à l'instant $t = 0$) ; une équation différentielle associée à une condition initiale est désignée sous l'appellation de *problème de Cauchy*. Dans ce cas, nous chercherons à déterminer (si elle existe) l'unique solution de l'équation différentielle (E).

Remarque. L'équation différentielle (E) s'écrit de manière équivalente sous la forme abrégée

$$(E) \; : \; y' = -0,1 \times y$$

où $y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer.

Les équations différentielles sont nombreuses, variées, de complexités différentes et apparaissent naturellement dans différentes domaines (biologie, physique quantique, thermodynamique, économie,...). Leur résolution est parfois complexe (la plupart du temps il n'existe pas encore de méthodes de résolutions complètes) et repose souvent sur des outils mathématiques dépassant de loin le programme du lycée. Modestement, nous allons étudier certains cas particuliers bien compris des mathématiciens. Débutons donc notre étude des équations différentielles.

13.2 Equation différentielle de la forme $y' = f$

La plus simple des équations différentielles que nous pouvons rencontrer est celle impliquant une fonction donnée f.

Exemple 13.2.1. 1. Résoudre l'équation $y' = 5$ consiste à trouver toutes les fonctions, dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ dont la dérivée est constante, égale à 5.

2. Si $f(x) = 2x+1$, résoudre l'équation différentielle $y' = 2x+1$ consiste à trouver toutes les fonctions, dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ dont la dérivée vaut égale à $2x+1$. Par exemple, on peut vérifier que $y_1(x) = x^2+x$ est une solution de cette équation différentielle. Nous constatons que la fonction $y_2(x) = x^2+x-3$ est également une autre solution.

Exercices à traiter : 1 à 3 page 207 puis 37 à 41 page 218 (cf. méthode 1 page 207).

13.3 Primitives

La section précédente suggère que nous devons étudier l'opération réciproque de la dérivation afin de résoudre les équations différentielles de la forme

$$y' = f \quad \text{avec} \quad f \quad \text{une fonction donnée.}$$

Plus précisément, si f est une fonction donnée nous cherchons F, une fonction dérivable telle que $F' = f$.[1]

Définition 13.3.1 (Primitive)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction dérivable F est une **primitive** de f sur I si $F' = f$.*

Remarque. 1. Au niveau de la terminologie nous avons l'équivalence

$$f \quad \text{a pour primitive} \quad F \quad \Longleftrightarrow \quad F \quad \text{a pour dérivée} \quad f.$$

2. Si F est une primitive de f alors $F+C$ avec $C \in \mathbb{R}$ l'est aussi. En effet,

$$(F+C)' = F' + C' = f + 0.$$

Voyons quelques exemples.

Exemple 13.3.1. 1. $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$.

2. Vérifier que $F(x) = 2x^3 - 3x + 4$ est une primitive de $f(x) = 6x^2 - 3$.

13.3.1 Condition d'existence et primitives des fonctions usuelles

Il est important de savoir à quelles conditions une fonction f, définie sur un intervalle I, admet des primitives.

Théorème 80. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I.*

Remarque. Il ne faut pas croire que toutes les primitives admettent des formules explicites. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives F. Toutefois, il n'est pas possible d'obtenir une formule impliquant des fonctions usuelles pour définir F. Il faudra patienter le chapitre sur le calcul intégral pour exprimer F.

Voyons quelles sont les primitives des fonctions usuelles. Pour cela, il suffit de lire le tableau des dérivées de droite à gauche.

Fonction	Domaine définition	Expression	Primitive
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = a$	$F(x) = ax$
puissances	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
puissance inverses	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^k}$ avec $k < -1$ un entier	$F(x) = -\frac{1}{k-1} \times \frac{1}{x^{k-1}}$
inverse	$]0;+\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
racine	$\mathbb{R}_+^*$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
exponentielle	$\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
cosinus	$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
sinus	$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$

1. Nous verrons plus tard de quelle manière la fonction F permet de calculer des aires sous la courbe C_f de la fonction f.

Remarque. 1. Dans le fond, lorsque $k \neq 1$, les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^k}$ s'obtiennent comme les puissances de x. En effet, $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$ et a pour primitive $F(x) = \frac{1}{1-k}x^{1-k} = \frac{1}{1-k} \times \frac{1}{x^{k+1}}$.

2. Pour se souvenir des primitives des fonctions trigonométriques, il est possible d'utiliser le moyen mnémotechnique suivant : lors de la résolution d''équations trigonométriques nous utilisons les observations suivantes :

   - l'axe $(Ox)_+$ correspond au cosinus positif,
   - l'axe $(Oy)_+$ correspond au sinus positif,
   - l'axe $(Ox)_-$ correspond au cosinus négatif,
   - l'axe $(Oy)_-$ correspond au sinus négatif.

   Pour **intégrer**, il suffit de passer d'un axe à l'autre en tournant dans le sens direct : la primitive de $\cos(x)$ (sur l'axe $(Ox)_+$) est $\sin(x)$ (sur l'axe $(Oy)_+$) ; la primitive de $\sin(x)$ (sur l'axe $(Oy)_+$) est $-\cos(x)$ (sur l'axe $(Ox)_-$).

   Pour **dériver**, il suffit de passer d'un axe à l'autre en tournant dans le sens indirect : la dérivée de $\cos(x)$ (sur l'axe $(Ox)_+$) est $-\sin(x)$ (sur l'axe $(Oy)_-$) ; la dérivée de $\sin(x)$ (sur l'axe $(Oy)_+$) est $\cos(x)$ (sur l'axe $(Ox)_+$).

La plupart du temps, les fonctions étudiées impliqueront des coefficients. Il est alors important d'avoir la proposition suivante (liée à la linéarité de l'opération de dérivation).

Proposition 81 (Linéarité des primitives). *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :*

- *$F + G$ est une primitive de $f + g$,*
- *si $k \in \mathbb{R}$, $k \times F$ est une primitive de $k \times f$.*

Voyons tout cela mis en oeuvre sur des exemples.

Exemple 13.3.2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I donnée.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$.
3. $h(x) = 4e^x + 8\sin(x) - 25x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.

Nous trouvons alors, grâce à ce qui précède, les primitives suivantes :

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x \quad ; \quad G(s) = x^3 + \frac{3}{x} \quad ; \quad H(x) = 4e^x - 8\cos(x) - 5x^5.$$

Exercices à traiter : 4-5 page 207 puis 48-49 page 218 (cf. méthode 2 page 207).

Le tableau précédent seul ne nous permet pas de trouver les primitives de toutes les fonctions étudiées en classe de terminale. Par exemple, comment déterminer une primitive de

$$f(x) = 2(2x+1)(x^2+x) \quad \text{ou} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \quad ?$$

Pour cela, il convient d'utiliser les formules de dérivations[2] des fonctions composées.

Proposition 82 (Primitives de fonctions composées). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, définie à l'aide d'une fonction dérivable $u : I \to \mathbb{R}$.*

Expression	*Primitive*	*Conditions*
$u' \times u^n$ *avec* $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	*lorsque* $n < -1$, $u(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ *pour tout* $x \in I$
$u'e^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u(x) > 0$ *pour tout* $x \in I$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	

2. Merci à A. Batel pour avoir relevé une faute de frappes dans les formules données.

Voyons quelques exemples de tout ceci.

Exemple 13.3.3. Trouver une primitive des fonctions données ci-dessous

1. $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = x^2 e^{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $\phi(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1)$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $\psi(x) = \frac{2x+1}{2x^2+2x+4}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Nous trouvons alors les primitives suivantes :

1. f est de la forme $u' \times u^2$ où $u'(x) = 2x-5$ et $u(x) = x^2-5x+4$ donc
$$F(x) = \frac{1}{3} \times (x^2-5x+4)^3.$$
2. g est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2+1$ donc
$$G(x) = \sqrt{x^2+1}.$$
3. h est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^3$ donc
$$H(x) = \frac{1}{3}e^{x^3}$$
4. ϕ est composée de deux fonctions de la forme $\cos(u)$ et $\sin(u)$ donc
$$\Phi(x) = \frac{1}{5}\sin(5x) + \cos(3x-1).$$
5. ψ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2^x 2 + 2x + 4$ donc
$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+4).$$

Exercices à traiter : 8-9 page 209 puis 50 à 54 page 219 (cf. méthode 4 page 207).

Voyons un dernier type d'exercice

Exemple 13.3.4. Soit la f fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.
2. Déterminer l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

Il suffit de dériver la fonction F pour répondre à la première question :
$$F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x).$$

Ensuite, nous savons que toutes les primitives de f sont de la forme $x \mapsto F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Puisque, nous cherchons la primitive qui s'annule en $x = 1$, nous devons déterminer la valeur de C à partir de l'équation
$$F(1) + C = 0 \iff e^2 + C = 0 \iff C = -e^2.$$
D'où, la fonction recherchée est $\tilde{F}(x) = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$.

Remarque. Voici un problème analogue Si $f(x) = -3e^{-3x+4}$ alors $u(x) = -3x+4$ et $F(x) = e^{-3x+4} + C$. Déterminons à présent la primitive F de f vérifiant $F(2) = 0$. Nous savons déjà que $F(x) = e^{-3x+4} + C$, il ne reste plus qu'à déterminer C :
$$F(2) = 0 \iff e^{-3\times 2+4} + C = 0 \iff e^{-2} + C = 0 \iff C = -e^{-2}.$$
Autrement dit, **l'unique primitive** vérifiant $F(2) = 0$ est : $F(x) = e^{-3x+4} - e^{-2}$.

Exercices à traiter : 55-56 page 218 ; 80 page 222 (avec étude complète).

13.4 Equation différentielle $y' = ay$

Reprenons notre étude des équations différentielles.

Problème : résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_h) \ : \quad y' = ay \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, nous cherchons l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'(t) = af(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque. Ce genre d'équations différentielles permet de modéliser l'évolution d'une population qui augmente proportionnellement à sa taille. D'une certaine manière, il s'agit de l'analogue, en temps continu, d'une suite géométrique.

Théorème 83. *Les solutions de (E_h) sont de la forme $f(t) = Ce^{at}$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Nous vérifions sans peine que $t \mapsto Ce^{at}$ est une solution de (E_h). Considérons maintenant f une solution quelconque de (E) et posons $\phi(t) = f(t)e^{-at}$. Par suite, $\phi'(t) = f'(t)e^{-at} - af(t)e^{-at}$ d'où, pour tout $t \in I$, nous avons

$$\phi'(t) = \big[f'(t) - af(t)\big]e^{-at} = 0$$

puisque, par hypothèse, f est une solution de (E) (i.e. $f' = af \iff f' - af = 0$). La dérivée de ϕ étant identiquement nulle sur l'intervalle I, il s'agit donc d'une fonction constante sur I. Autrement dit, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$\phi(t) = C \iff f(t) = Ce^{at}.$$

Nous venons donc d'établir que toutes les solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto Ce^{at}$. □

Remarque. Il y a donc une infinité de solutions (chaque valeur de C donne une nouvelle solution).

Voyons sur un exemple.

Exemple 13.4.1. Résolvons sur $I = \mathbb{R}$ l'équation

$$(E_h) \ : \quad y' = -\frac{3}{2}y.$$

D'après le théorème précédent, les solutions sont de la forme $f(t) = Ce^{-\frac{3}{2}t}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) avec $C \in \mathbb{R}$. Voici quelques courbes représentatives de solutions (suivant différentes valeurs de C)

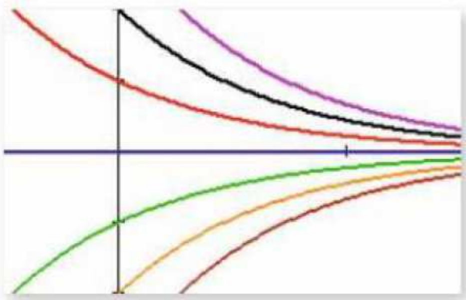

FIGURE 13.1 – Représentations graphiques de solutions de (E_1)

Si jamais l'énoncé impose une condition « initiale », cela nous force à choisir une valeur particulière de C. Par exemple, si la courbe C_f d'une solution doit passer par le point $A(2;1)$ cela signifie que f doit aussi vérifier

$$f(2) = 1 \iff Ce^{-\frac{3}{2}\times 2} = 1 \iff C = e^3.$$

L'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{3}{2}y & \text{(équation différentielle)} \\ y(2) = 1 & \text{(condition initiale).} \end{cases}$$

est $f(t) = e^3 \times e^{-\frac{3}{2}t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque. Toujours dans un contexte de modélisation, si notre équation différentielle est issue d'une évolution de population. L'étude de la solution f permet d'obtenir des informations sur l'avenir de cette population. Par exemple, lorsque $t \to +\infty$, nous constatons que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ signifiant qu'à terme, la population va s'éteindre.

Exercices à traiter : 10-11 page 211 (cf. Méthode 5 page 211).

13.4.1 Equation différentielle $y' = ay + b$

Problème : résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\ :\quad y' = ay + b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, nous cherchons l'ensemble des fonctions $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'(t) = af(t) + b$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque. D'une certaine manière, il s'agit de l'analogue, en temps continu, d'une suite arithmético-géométrique.

Cette fois-ci, la résolution se fait en deux temps :

1. D'abord, nous cherchons une solution f_h de l'équation différentielle homogène associée :
$$(E_h)\ :\ y' = ay$$
à l'aide du théorème 83.
2. Ensuite, nous cherchons une solution particulière de f_p de l'équation différentielle (E).

La combinaison de ces deux étapes fournit le théorème suivant.

Théorème 84. *En conservant les notations précédentes, les solutions de (E) sont de la forme $f(t) = f_h(t)+f_p(t)$. Plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$f(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a} \quad \textit{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque.

1. Il est sous-entendu (en utilisant le théorème 83) que les solutions de l'équation homogène (E_h) sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$f_h(t) = Ce^{at} \quad \text{pour tout} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$
et que
$$f_p(t) = -\frac{b}{a} \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}$$
est une solution particulière de (E_2).
2. A nouveau, (E) admet une infinité de solutions (pour chaque choix de C). Comme auparavant, si une condition initiale est imposée, il existe une unique solution.

Voyons sur un exemple.

Exemple 13.4.2. Résolvons sur $I = \mathbb{R}$ l'équation

$$(E_2)\ :\quad 2y' + 3y = 6 \quad \iff \quad y' = -\frac{3}{2}y + 3.$$

D'après le théorème 84 (avec $a = -\frac{3}{2}$ et $b = 3$), les solutions sont de la forme

$$f(t) = Ce^{-\frac{3}{2}t} + 2 \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Voici quelques courbes représentatives de solutions (suivant différentes valeurs de C)

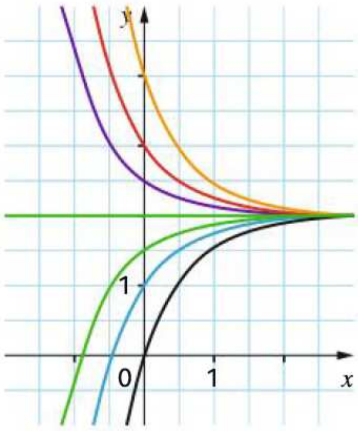

FIGURE 13.2 – Représentations graphiques de solutions de (E)

Si jamais l'énoncé impose une condition « initiale », cela nous force à choisir une valeur particulière de C. Par exemple, si la courbe C_f d'une solution doit passer par le point $A(0;3)$ cela signifie que f doit aussi vérifier

$$f(0) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad Ce^{-\frac{3}{2}\times 0} + 2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad C + 2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad C = 1.$$

L'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{3}{2}y + 2 & \text{(équation différentielle)} \\ y(0) = 3 & \text{(condition initiale).} \end{cases}$$

est donc $f(t) = e^{-\frac{3}{2}t} + 2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercices à traiter : 12-13 pages 211 (cf. Méthode 6 page 211) ; 89 à 94 page 223-224.

13.4.2 Equation différentielle $y' = ay + f$

Problème : résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \ : \quad y' = ay + f \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f \quad \text{une fonction donnée, continue sur} \quad I.$$

La méthode de résolution est la même que dans la section précédente.

1. D'abord, nous cherchons une solution f_h de l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_h) \ : \ y' = ay$$

   à l'aide du théorème 83.
2. Ensuite, nous cherchons une solution particulière de f_p de l'équation différentielle (E).

La combinaison de ces deux étapes fournit le théorème suivant.

Théorème 85. *En conservant les notations précédentes, les solutions de (E) sont de la forme $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$. Plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$f(t) = Ce^{at} + f_p(t) \quad \textit{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque. A nouveau, (E) admet une infinité de solutions (pour chaque choix de C). Comme auparavant, si une condition initiale est imposée, il existe une unique solution.

Voyons sur un exemple.

Exemple 13.4.3. L'objectif de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle $(E) \ : \ y' - y = x - 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ par $f_p(x) = -x + 2$ est une solution particulière de (E).
2. En déduire la forme générale de toutes les solutions de (E).

Nous observons facilement que $f_p'(x) = -1$ donc

$$f_p'(x) - f_p(x) = -1 - (-x+2) = x - 3.$$

f_p est bien une solution particulière. Résolvons maintenant, l'équation différentielle homogène (E_h) associée :

$$(E_h) : \quad y' - y = 0 \quad \iff \quad y' = y.$$

D'après les cours, les solutions de cette équation sont de la forme $f_h(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$. Par suite, d'après le théorème 85, nous savons que toutes les solutions de (E) sont de la forme

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = Ce^x - x + 2 \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercices à traiter : 22 à 27 et 96 à 98 page 224 (cf. méthode 10 page 215).

13.5 Pour aller plus loin :

Modèle SIR à présenter.