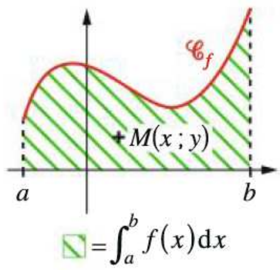
Chapitre 15

Calcul intégral

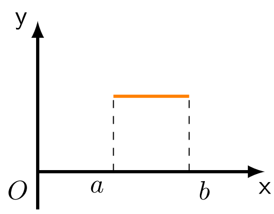
L'objectif de ce chapitre est de construire la notion d'intégrale d'une fonction donnée. Il est possible, dans un premier temps, d'aborder ceci d'un point de vue géométrique en se posant la question suivante : étant donnée une fonction bornée $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I ainsi que deux nombres $a < b$, comment déterminer l'aire sous la courbe (hachurée en vert ci-dessous) ?



Remarque. L'aire hachurée en vert correspond à l'intégrale (notée $\int$) de a à b de la fonction f.

Il semble plutôt délicat d'apporter une solution à ce problème dès lors que la courbe devient « trop compliquée » et qu'elle ne ressemble en rien aux surfaces connues (rectangles, trapèzes, triangles,...). Il devient alors naturel d'être moins ambitieux en commençant par mettre au point une méthode fonctionnant pour des courbes très simples puis de trouver un moyen d'étendre ce procédé pour atteindre une large classe de fonctions.

La plus simple des fonctions que nous pouvons rencontrer est celle qui est constante sur l'intervalle $[a; b]$:



Dans ce cas là, il est très simple de calculer l'aire sous la courbe délimitée par les droites $x = a$ et $x = b$ puisqu'il s'agit d'un rectangle. La merveilleuse idée de Riemann consiste à étudier une subdivision $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ de l'intervalle $[a; b]$ afin de produire toute une famille de rectangle de tailles différentes :

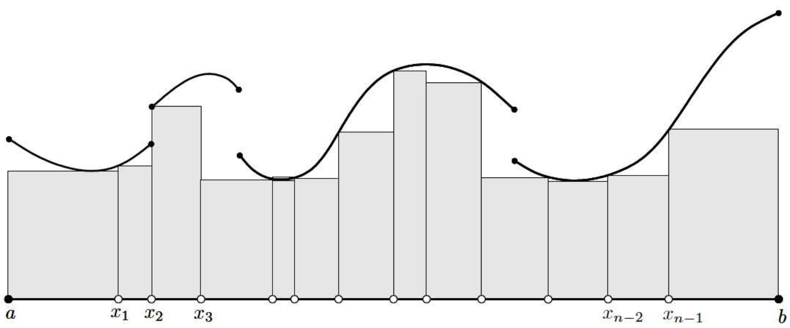


FIGURE 15.1 – Rectangles inférieurs

Nous constatons alors deux choses : évidemment, cette famille de rectangle n'épouse pas bien l'allure de la courbe. De plus, à cause des écarts situés entre les rectangles et la courbe, nous constatons que nous l'aire que nous voulons déterminer est approchée par défaut. D'ailleurs, nous aurions très bien pu approcher cette aire par excès en proposant des rectangles qui « débordent » :

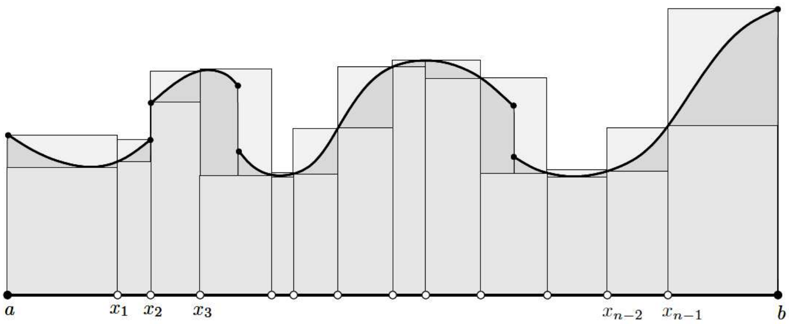


FIGURE 15.2 – Rectangles supérieurs

L'intuition de Riemann est la suivante : dès lorsque la fonction f est suffisamment régulière, il est possible de choisir une subdivision suffisamment fine[1] pour que la différence entre l'aire des rectangles inférieurs et supérieurs tende vers 0. Ceci donnant alors un moyen d'approchée l'aire sous la courbe que nous souhaitions déterminer. Il convient alors de s'interroger : quelle est la régularité minimale requise pour la fonction f pour que nous puissions mettre en oeuvre la méthode de Riemann avec la somme des aires de rectangles ? Bien qu'il soit envisageable de se placer dans un cadre plus général, en classe de terminale nous allons nous contenter d'étudier l'intégrale de fonction continues sur un intervalle $[a; b]$.

15.1 Calcul intégral

Dans ce qui suit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sera une fonction continue.

Définition 15.1.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous appelons* intégrale de a à b de f *l'aire délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$. Nous noterons ceci*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Par convention, l'aire située au dessus de l'axe (Ox) est comptée positivement, celle située sous l'axe (Ox) est compté négativement. Graphiquement,

1. De sorte que la largueur des rectangles correspondent à la quantité infinitésimale dx. Il ne restera plus qu'à additionner ou sommer (en abrégé $\sum$) l'aire de ces rectangles de longueur $f(x)$ et de largueur dx pour obtenir l'aire recherchée : ceci revient à calculer $\int_a^b f(x)dx$ où le symbole $\sum$ s'est, au fil du temps, déformé en int.

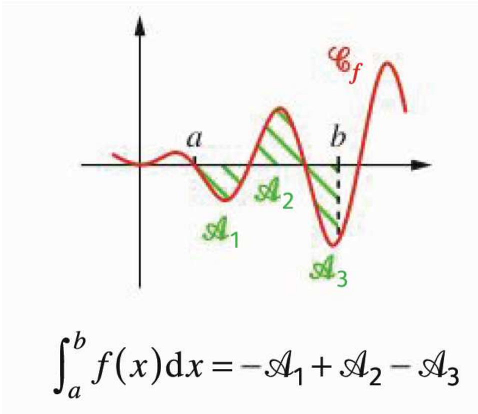


FIGURE 15.3 – Rectangles supérieurs

Remarque. 1. L'intégrale correspondant à une aire, nous exprimons celle-ci en *u.a.* (unités d'aire en abrégé). Ainsi, si l'échelle du repère orthonormé utilisé implique des cm, l'aire sera en cm^2.

2. La variable x apparaissant dans l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est muette : elle peut être remplacée par n'importe qu'elle autre variable (à condition que celle-ci n'intervient par à d'autres endroits du problème étudié). Ainsi, nous avons
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy.$$

3. La quantité
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
est appelée valeur moyenne de f sur $[a;b]$. Il s'agit d'une généralisation de la moyenne étudiée en statistiques.

15.1.1 Méthode des rectangles

Lorsque la fonction f étudiée est également monotone, la méthode des rectangles permet d'obtenir un encadrement de $\int_a^b f(x)dx$.

Proposition 89 (Encadrement par la méthode des rectangles)**.** *Soit $f : [a,b]$ une fonction continue, positive et monotone. Notons $\mathcal{A}_i$ la somme des rectangles inférieurs et $\mathcal{A}_s$ la somme des rectangles supérieurs obtenus à partir d'une subdivision $x_0 < \ldots < x_n$ de l'intervalle $[a,b]$ alors nous avons l'encadrement suivant :*
$$\mathcal{A}_i \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \mathcal{A}_s.$$

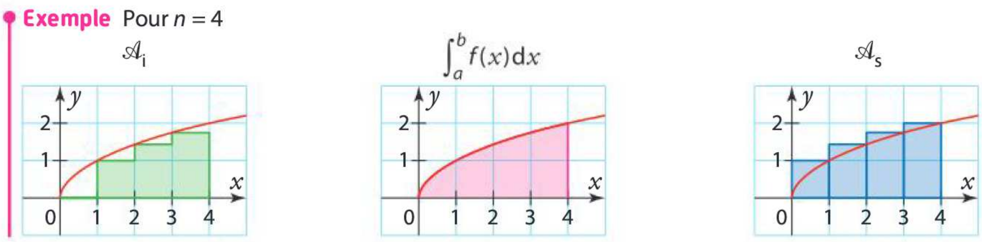


FIGURE 15.4 – Encadrement par la méthode des rectangles

Remarque. En fait, ce résultat sera vrai en supposant seulement que f est une fonction bornée sur $[a;b]$. Si de plus f est continue sur $[a;b]$, il est possible de trouver une subdivision $x_0 < \ldots < x_n$ [2] telle que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_i = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_s = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Si $n \geqslant 1$ est donné, il suffit de poser $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$. Autrement dit $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \int_a^b f(x)dx$.

Pour alléger les notations, nous avons omis la dépendance en n de $\mathcal{A}_i$ ou $\mathcal{A}_f$.

Exercices à traiter : 3 page 243 et 40 page 254 (cf. Méthode 2 page 243).

Il est tout de même un peu ennuyant de n'avoir que des estimations et aucun moyen commode de calculer l'intégrale d'une fonction donnée. La section suivante a pour objectif de palier à cela.

15.2 Intégrales et primitives

Imaginons que nous faisions varier la borne b d'intégration en la remplaçant par un nombre x. Que pouvons-nous dire de la fonction F définie sur $[a;b]$ par

$$F\,:\,x \mapsto \int_a^x f(t)dt \quad ?$$

Théorème 90. *Soit f une fonction continue sur un intervalle (fermé et borné) I. Considérons $a \in I$ et définissons F sur I par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \textit{pour tout} \quad x \in I.$$

Alors F est dérivable et nous avons

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in I \quad \textit{et} \quad F(a) = 0.$$

Autrement dit, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Remarque. Etant donnée une fonction continue f, nous venons de constater que l'intégrale un moyen permettant d'obtenir une primitive de f. D'une certaine manière, l'opération d'intégration devient l'opération réciproque de dérivation. Si f est seulement intégrable (au sens de Riemann sur $[a,b]$), sa primitive F sera continue sur $[a,b]$.

Le lien qui vient d'être fait entre intégrales et primitives va nous permettre d'obtenir un théorème fabuleux qui nous permettras de calculer simplement l'intégrale d'une fonction continue.

Théorème 91 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Si F est une primitive d'une fonction f continue sur $[a;b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Remarque. Nous venons donc de réduire le calcul d'une intégrale à simplement déterminer une primitive.

Voyons sur quelques exemples.

Exemple 15.2.1.

1. $\int_{-1}^2 xdx = [\frac{x^2}{2}]_{-1}^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$ u.a..
2. $\int_1^e \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^e = 1$ u.a..
3. $\int_0^2 e^{-3t+1}dt = \big[-\frac{1}{3}e^{-3t+1}\big]_0^2 = \frac{1}{3}(e - e^{-5})$ u.a..

Exercices à traiter : 1, 2 page 243 ; 5, 6 page 245 ; 43 à 52 page 255.

Il se trouve que nous aurons souvent affaire à des fonctions plus élaborées que celles que nous venons de rencontrer. Il convient alors d'exhiber des propriétés de l'intégrale permettant de faciliter nos calculs.

15.2.1 Propriétés de l'intégrale

Supposons maintenant que nous voulions calculer l'intégrale d'une fonction plus complexe. Par exemple, la fonction $f(x) = 3x^2 - 6x - 4$. Il serait intéressant de pouvoir traiter les termes les uns après les autres pour ensuite additionner le résultat.

Proposition 92 (Linéarité de l'intégrale)**.** *Soient $f\,:\,[a;b] \to \mathbb{R}$ et $g\,:\,[a;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Cette formule semble compliquée alors qu'elle est simple d'emploi et très intuitive. Voyons plutôt.

Exemple 15.2.2. Calculons $I = \int_1^3 3x^2 - 6x - 4dx$. D'après ce qui précède, nous avons

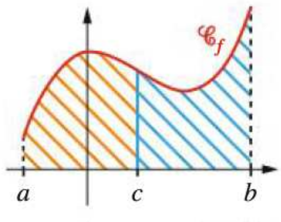
$$I = 3\int_1^3 x^2dx - 6\int_1^3 xdx - 4\int_1^3 1dx = [\frac{x^3}{3}]_1^3 - 3[\frac{x^2}{2}]_1^3 - 4(3-1) = \dots$$

Exercices à traiter : 10 page 247 puis 45 page 255 (cf. Méthode 5 page 247).

Il existe aussi une propriété permettant de découper en plusieurs parties le domaine d'intégration.

Proposition 93 (Relation de Chasles)**.** *Soit* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $c \in [a;b]$ *alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



En particulier,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Exemple 15.2.3. Ainsi $\int_0^2 e^{-4t}dt = \int_0^1 e^{-4t}dt + \int_1^2 e^{-4t}dt$.

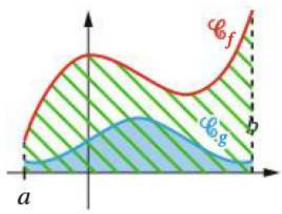
Exercices à traiter : 65 page 256 puis 68,70 page 256.

15.2.2 Monotonie de l'intégrale

Comme cela est implicite via la méthode des rectangles, l'intégrale se comporte très bien vis-à-vis des inégalités et cela permet de résoudre facilement certains problèmes.

Proposition 94. *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a;b]$ *telles que* $g(x) \leqslant f(x)$ *pour tout* $x \in [a;b]$ *alors*

$$\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx$$



Remarque. 1. En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

2. Puisque f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{pour tout} \quad x \in [a;b]$$

d'où, après intégration, nous avons

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Exercices à traiter : 11, 12 page 247 (cf. Méthode 6 page 247) ; 122 page 261 §cf. méthode 9 page 250).

Ces propriétés de monotonie permettent en particulier de déterminer l'aire comprises entre deux courbes.

Exemple 15.2.4. Imaginons que nous souhaitions calculer l'aire comprise entre la courbe $y = \frac{1}{x} + x$ et la courbe $y = x$ sur l'intervalle $[1; 2]$. En utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale, nous constatons qu'il suffit de calculer la quantité suivante :

$$\int_1^2 x + \frac{1}{x} dx - \int_1^2 x dx.$$

Exercices à traiter : 15 et 16 page 249 (cf. méthode 8 page 249).

15.3 Intégration par parties

Certaines primitives ne sont pas simples à déterminer. Par exemple, comment trouver une primitive de $f(x) = \ln(x)$. A priori, nous ne savons pas comment faire (i.e. comment trouver une fonction dont la dérivée vaut précisément $\ln(x)$). Voici une solution à ce problème.

Proposition 95 (Intégration par parties)**.** *Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ telles que leurs dérivées u' et v' soient également continues sur $[a; b]$* [3] *alors, l'identité suivante est vérifiée*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx. \tag{15.3.1}$$

Démonstration. La démonstration est élémentaire en observant que

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

et en utilisant la linéarité de l'intégrale. □

Voyons ceci en application.

Exemple 15.3.1. Déterminons l'intégrale suivante

$$\int_2^4 \ln(x)dx.$$

Pour cela, posons $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$ ainsi $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Nous constatons d'ailleurs que $u, v \in C^1\big([a; b]\big)$. La formule d'intégration par partie (15.3.1) nous assure alors que

$$\int_2^4 \ln(x)dx = [x \ln x]_2^4 - \int_a^b x \times \frac{1}{x} = 4 \ln 4 - 2 \ln 2 - 2.$$

En particulier, nous avons montré que $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercices à traiter : 7 et 8 page 245 puis 53 à 59 page 255 (cf. méthode 4 page 245) ; 119 et 121 page 260 ; sujets type bac.

15.4 Pour aller plus loin

15.4.1 Modélisation en probabilité

De nombreux phénomène aléatoires se modélisent à l'aide d'une intégrale [4]. Parmi eux, se trouve la durée de vie d'un composant électronique et celle-ci se modélise à l'aide d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle dont voici la définition.

3. En abrégé, nous dirons que u et v sont de classe $C^1\big([a; b]\big)$.

4. C'est systématiquement le cas lorsque la variable aléatoire (sous-jacente au phénomène aléatoire) prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ plutôt qu'un ensemble discret.

Définition 15.4.1. *Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour tout $x \geqslant 0$. En particulier,*

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leqslant a < b.$$

De manière abrégée, nous noterons $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ pour signifier que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Remarque. 1. La loi exponentielle est pertinente lorsque nous souhaitons modéliser certains évènements aléatoires. Par exemple, elle intervient aussi lorsque l'on s'intéresse à la durée de vie d'un matériel électronique. Elle apparaît également en radioactivité : la durée de vie d'un élément radioactif suit une loi exponentielle. Elle est également présente lorsque l'on cherche à modéliser des files d'attentes. En effet, il est usuel de modéliser l'arrivée de nouveaux clients dans la file par une loi exponentielle.

2. Observons que $F(x) = -e^{-\lambda x}$ (avec $x \geqslant 0$) est une primitive de f. Ainsi,
$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a).$$
En particulier, lorsque $b \to +\infty$, nous avons $\mathbb{P}(a \leqslant X) = -F(a) = e^{-\lambda a}$.

Voyons un exemple de calculs.

Exemple 15.4.1. 1. Soit $X \sim \mathcal{E}(0,02)$ alors
$$\mathbb{P}(20 \leqslant X \leqslant 50) = \int_{20}^{50} 0,02 e^{-0,02x} dx = [-e^{-0,02x}]_{20}^{50} = e^{-0,4} - e^{-1} \approx 0,302.$$
et
$$\mathbb{P}(X \leqslant 100) = \int_0^{100} 0,02 e^{-0,02x} dx = [-e^{-0,02x}]_0^{100} = 1 - e^{-2} \approx 0,865.$$
Notons que X ne prend que des valeurs positives.

2. Calcul $\mathbb{P}(X > 2) = \lim_{A \to +\infty} \int_2^A 0,02 e^{-0,02x} dx = e^{-0.04}$ d'après la remarque.

3. La loi Exponentielle est une loi sans mémoire : déterminons la probabilité que la durée de vie d'un composant électronique (dont le paramètre $\lambda = 0,02$) dépasse 5 ans sachant qu'il a déjà vécu 3 ans. Autrement dit, calculons
$$\mathbb{P}_{X>3}(X > 5) = \frac{\mathbb{P}(X > 5 \cap X > 3)}{\mathbb{P}(X > 3)} = \frac{\mathbb{P}(X > 5)}{\mathbb{P}(X > 3)} = \frac{e^{-0.02\times 5}}{e^{-0,02\times 3}} = e^{-0.02\times 2} = \mathbb{P}(X > 2).$$
Autrement dit, la variable aléatoire a « oublié » qu'elle avait déjà vécu 3 ans et que cette probabilité conditionnelle correspond simplement à la probabilité $\mathbb{P}(X > 2)$.

15.4.2 Intégrale de Lebesgue

L'approche de l'intégration au sens de Riemann repose trop sur la structure de la droite réelle. Nous partons en effet d'une subdivision quelconque de l'intervalle $[a, b]$ afin de considérer les sommes d'aires de rectangles associés à une fonction f. Cela paraît pertinent de rétorquer qu'a priori, la subdivision n'a aucun lien avec la fonction étudiée. D'une manière imagée, Riemann s'apparente à un commerçant mal organisé : tout au long de la journée, il empile les uns au dessus des autres les billets donnés par ses clients. Il fait cela sans faire attention à leur valeurs et, à la fin de la journée, il les additionne[5] les uns après les autres : un billet de 5, un billet de 50, un billet de 20, un billet de 20, un billet de 5, un billet de 10, ... Nous imaginons facilement que ce décompte pourrait être rendu plus bien compliqué lorsque la valeur des billets n'est plus un nombre entier. La méthode de Lebesgue (que nous exposerons ultérieurement) consiste, à ranger dès le départ les billets de 5 ensembles, ceux de 10 également, etc. Son décompte est ensuite faciliter puisqu'il n'a plus qu'à opérer par paquets : combien de billets de 5 ? combien de 10 ? etc pour additionner le tout.

Il est aussi ennuyeux de pouvoir proposer des fonctions très simples que nous ne pouvons pas intégrer

Exemple 15.4.2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad ; \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$
Il se trouve que la fonction obtenue (appelée fonction de Dirichlet) n'est pas intégrable.

5. Comme l'aire des rectangles de la subdivisions, pris les uns à la suite des autres en commençant au début de l'intervalle $[a, b]$.

Pour résoudre ce problèmes, et d'autres qui ne sont pas évoqués, il faut attendre les idées du français Henri Lebesgue qui proposa une nouvelle approche de l'intégrale en considérant des rectangles partant de l'axe des ordonnées plutôt que de l'axe des abscisses. Ce simple changement de point de vue entraine des résultats remarquables et permet, au prix d'efforts techniques plus élevés, de résoudre les problèmes rencontrées par l'intégrale que nous venons d'étudier.

15.4.3 Produit scalaire dans un espace de fonctions

Il se trouve qu'il est possible de définir la notion d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur l'espace de fonctions continues sur un intervalle fermé et borné $[a;b]$ [6]. Ceci s'effectue de la manière suivante : pour toutes fonctions continues $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, posons

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Cette formule vérifie les mêmes relations algébriques [7] que ce qui a été étudié pour le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ entre des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Cette observation signifie qu'il est possible de donner un sens à l'orthogonalité entre des fonctions : f est orthogonale à g si

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Tout ceci permet donc d'étendre tous les résultats géométriques qui ont été étudiés dans l'espace (notion de projeté orthogonale par exemple). Ce changement de point de vue revient finalement à considérer les fonctions comme de simple vecteurs, en oubliant l'existence d'une variable x sous-jacente. Ce point de vue est fécond et permet, par exemple de montrer qu'un mp3 n'est rien d'autre qu'une projection orthogonale d'un point (i.e. une fonction modélisant la version analogique du morceau) sur un espace bien choisi. Tout ceci relève de la théorie des espaces de Hilbert.

6. Il est même possible de faire beaucoup plus général.
7. en substance : symétrie, bilinéarité ainsi qu'une propriété de positivité.