Chapitre 2

Compléments sur la dérivation

2.1 Dérivation d'une fonction et monotonie

La notion de dérivation est un outil formidable pour étudier les variations d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

Définition 2.1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point intérieur de I. Lorsque l'accroissement suivant*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.1.1}$$

admet une limite finie, nous dirons que f est dérivable en a. Le résultat (de la limite dans (2.1.1)) est le ***le nombre dérivée*** *de f en a et sera noté $f'(a)$; la fonction f'* [1] *est la dérivée de f.*

Remarque. D'un point de vue physique, f correspond à la position d'un objet et f' à sa vitesse. A ce propos, les physiciens notent parfois la dérivée $\frac{df}{dx}(x)$ pour indiquer que la fonction a été dérivé suivant la variable x.

Lorsque f est dérivable en un point a, (2.1.1) montre que localement f se comporte comme une fonction affine. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 2.1.1. Soit $f(x) = x^2 + 3x - 1$ et déterminons le nombre dérivée en $a = 2$. Pour cela, considérons $h \in \mathbb{R}$ et étudions l'accroissement

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - 1 - 2^2 - 3 \times 2 + 1}{h} = \frac{h^2 + 7h}{h} = 7 + h.$$

D'où, lorsque $h \to 0$, nous avons $f'(2) = 7$.

Remarque. Les calculs précédents montrent que $h \mapsto f(2+h)$ se comporte comme la fonction affine $h \mapsto f(2)+7h$ lorsque h est suffisamment petit. En effet, si $h = 0,001$ nous avons

$$f(2.001) = 9,007001 \quad \text{tandis que} \quad f(2) + 7 \times 0,001 = 9,007.$$

Autrement dit, au voisinage du point 2, f se comporte comme une fonction affine. Graphiquement, lorsque f est dérivable, ceci est visible via la notion de tangente à la courbe C_f : localement (en zoomant beaucoup au voisinage de a), C_f est confondue avec sa tangente (au point a). C'est d'ailleurs l'occasion de rappeler la formule donnant l'équation d'une tangente en un point.

Définition 2.1.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et notons C_f sa représentation graphique. La tangente à C_f au point $a \in I$* [2] *est la droite d'équation*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Remarque. Ceci précise notre affirmation précédente : au voisinage de a, la courbe C_f d'équation $y = f(x)$ et la tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ sont presque confondues.

Exemple 2.1.2. En reprenant l'exemple précédent, nous constatons que l'équation de la tangente à C_f au point $a = 2$ est

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 7x - 10.$$

1. définie là où f est dérivable, c'est à dire là où la limite de (2.1.1) existe.
2. a doit être un point intérieur à I.

Remarque. Observons que le coefficient directeur de la tangente à C_f au point a correspond au nombre dérivée $f'(a)$.

L'intérêt derrière tout ceci est le phénomène suivant : lorsque f est dérivable, il est possible « d'entourer » C_f par l'ensemble des tangentes. Il devient alors clair **qu'il existe un lien entre le signe du nombre dérivée**[3] **et la monotonie de** f. Le lecteur se souvient alors de ce qui a été vu en classe de 1ère : pour étudier les variations d'une fonction compliquée, il est nécessaire de **déterminer le signe de la fonction dérivée** f' (laquelle étant souvent plus simple que f) car celui-ci permet d'en **déduire les variations de** f.

Théorème 2 (Dérivée et variations)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I :*

- *si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ alors la fonction est croissante sur I.*
- *si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$ alors la fonction est décroissante sur I.*

En plus de cela, la notion de dérivée permet de déterminer la nature des extremums locaux (maximum ou minimum locaux).

Théorème 3 (Dérivée et extremum locaux)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I et a un point intérieur à I.*

1. *(Condition nécessaire) si $f(a)$ est un extremum local alors $f'(a) = 0$*
2. *(Condition suffisante) si $f'(a) = 0$ et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum local.*

Remarque. Attention l'hypothèse $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour que $f(a)$ soit un extremum local. Par exemple, le lecteur pourra considérer la fonction $f(x) = x^3$ pour constater cela : le point critique $a = 0$ annule la dérivée mais celle-ci ne change pas de signe et 0 n'est pas un extremum.

Maintenant que nous avons rappelé l'utilité de la fonction dérivée, il semble primordial de se remettre en tête les règles de dérivations ainsi que les formules usuelles.

2.2 Règles de dérivation

Débutons par les fonctions les plus simples.

2.2.1 Fonctions polynomiales

Nous devons donc être en mesure de calculer la dérivée d'une fonction donnée. Pour cela, il convient tout d'abord d'apprendre à dériver les puissances de x.

Proposition 4. *Le tableau suivant fournit le domaine de définition ainsi que la dérivée de fonctions usuelles.*

Fonction	*Domaine définition*	*Expression*	*Domaine dérivation*	*Dérivée*
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
cube	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
inverse	$\mathbb{R}_*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
racine	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque. Il est utile de retenir la formule suivante qui englobe les cas précédents. Soit $n \in \mathbb{Z}$ (avec $n \neq 0$) et $f(x) = x^n$ alors

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

En fait, il est possible de montrer que cette formule reste valable pour $n \in \mathbb{R}$.

La plupart du temps, la proposition précédente 4 est utilisée avec la proposition suivante. Celle-ci explique comment dériver la somme de deux fonctions dérivables ou comment dériver une fonction multipliée par une constante.

3. Lequel détermine la monotonie de la fonction affine associée à la tangente

Proposition 5 (Dérivée d'une somme)**.** *Soient u, v deux fonctions dérivables et $a \in \mathbb{R}$.*

$$(au)' = au' \quad \textit{et} \quad (u+v)' = u' + v'.$$

Démonstration. Le lecteur désireux de progresser en faisant des démonstrations plus théoriques est invité à proposer une preuve de ce résultat en revenant à la définition 2.1.1. □

Remarque. Le résultat précédent nous affirme donc qu'en additionnant deux fonctions dérivables la fonction obtenue est encore dérivable et qu'en multipliant une fonction dérivable par un nombre réel la fonction obtenue est également dérivable. Ceci à rapprocher de ce que nous connaissons déjà pour les vecteurs : soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est une nouveau vecteur (que nous pouvons facilement déterminer lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont, par exemple, exprimés à l'aide de coordonnées). De la même manière, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur alors $\lambda\overrightarrow{u}$ est un nouveau vecteur. Les ensembles vérifiant[4] ces propriétés de stabilités sont appelés **espaces vectoriels réels**.

Voyons cela sur un premier exemple en proposant une étude complète d'une fonction de degré 2.

Exemple 2.2.1. Au lieu de présenter de nombreux points théoriques, traitons l'exemple suivant en détail. Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 12$. Tout d'abord nous voulons calculer $f'(x)$. Les règles usuelles montrent que

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4.$$

Il convient ensuite de déterminer le signe de $f'(x)$ en utilisant le discriminant (puisque f' est un polynôme de degré 2). Ici nous avons $\Delta = 64 - 4 \times 4 \times 3 = 16 > 0$. Il existe alors deux racines :

$$x_1 = \frac{8+4}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}.$$

De plus, le coefficient dominant $a = 3 > 0$ nous avons donc

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où, f admet les variations suivantes

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. La justification des limites en $\pm\infty$ sera donnée dans un chapitre ultérieur.

2.2.2 Fonction exponentielle

Par moments, il faudra être capable de dériver des fonctions impliquant l'exponentielle.

Proposition 6. *La fonction exponentielle* $\exp : x \mapsto e^x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $(e^x)' = e^x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. A toutes fin utiles, rappelons quelques propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad ; \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad ; \quad (e^a)^b = e^{ab} \quad \text{pour tout} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ces propriétés sont à comparer avec celles des puissances de 10.

Bien entendu, le lecteur aura rencontré des fonctions plus élaborées impliquant des produits ou des quotients. Il est donc naturel de savoir dériver de tels objets.

4. Nous omettons quelques détails ici pour ne pas alourdir inutilement la présentation et ne pas sortir trop du programme de terminale.

2.2.3 Dérivation d'un produit ou d'un quotient

Proposition 7 (Dérivée d'un produit)**.** *Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors le produit $u \times v$ est dérivable et*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Remarque. 1. En particulier, lorsque $v = u$, nous en déduisons que

$$(u^2)' = u'u + uu' = 2uu'.$$

2. Il est primordial de retenir le fait suivant :

la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées !

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 2.2.2. Soit $f(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$ est le produit de deux fonctions dérivables $u(x) = 3^2 + 4x$ et $v(x) = 5x - 1$. Ainsi, nous avons $u'(x) = 6x + 4$ et $v'(x) = 5$ d'où

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5 = 45x^2 + 34x - 4.$$

Voyons maintenant comment traiter la dérivation de quotients.

Proposition 8 (Dérivée d'un quotient)**.** *Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Remarque. 1. Si $u(x) = 1$ pour tout $x \in I$, la formule précédente nous assure que

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

2. Il est essentiel de retenir que

la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées !

Traitons un exemple d'application.

Exemple 2.2.3. Soit $h(x) = \frac{-12x+3}{2x+4}$. Déterminons h' sur l'intervalle $]-2, +\infty[$, pour cela nous allons utiliser la formule de dérivation d'un quotient avec

$$u(x) = -12x + 3 \quad \text{et} \quad v(x) = 2x + 4.$$

Par suite, $u'(x) = -12$ et $v'(x) = 2$ c'est pourquoi nous obtenons

$$h'(x) = \frac{-12 \times (2x + 4) - (-12x + 3) \times 2}{(2x + 4)^2} = \frac{-54}{(2x + 4)^2}.$$

Remarque. Au niveau de la terminologie, le quotient d'un polynôme par un autre polynôme s'appelle une fraction rationnelle. L'étude des variations d'une telle fonction s'effectue de la même manière que pour un polynôme de degré 2. Il faut toutefois ajouter une étape consistant à déterminer les éventuelles valeurs interdites (i.e. les valeurs annulant le dénominateur) et préciser le signe du dénominateur[5]

Maintenant que nous avons passé en revu les points essentiels de l'année passée, il est temps d'aborder quelques nouveautés.

2.3 Composition et dérivation

Dans un premier temps, il convient de présenter une **nouvelle manière de construire des fonctions**. Il s'agit de la notion de **composition**.

5. A ce propos, il est rarement pertinent de développer le dénominateur d'une fraction rationnelle : cela rend l'étude de signe associée inutilement plus complexe.

2.3.1 Opération de composition

Etant données deux fonctions f et g, l'objectif est de créer une nouvelle fonction h.

Définition 2.3.1. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ avec I et J deux intervalles. La fonction $f \circ g : J \to \mathbb{R}$ obtenue comme composée de f et g est définie par*

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) \quad \text{avec} \quad x \in J.$$

Remarque. 1. Il est essentiel que $g(x)$ appartienne à I (l'ensemble de définition de f) pour tout $x \in J$. Sans quoi il ne sera pas possible de calculer $f \circ g(x)$.

2. En général, lorsque les compositions font sens, $f \circ g \neq g \circ g$.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 2.3.1. 1. Si $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2$ alors $f \circ g$ et $g \circ f$ existent et sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f \circ g(x) = 3x^2 + 1 \quad \text{tandis que} \quad g \circ f(x) = (3x + 1)^2$$

2. Si $f(x) = x - 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$ alors $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f \circ g(x) = \sqrt{x} - 4.$$

En revanche, $g \circ f$ est définie sur $[4; +\infty[$ et

$$g \circ f(x) = \sqrt{x - 4}.$$

Notons, par exemple, que $g \circ f(2)$ n'existe pas.

3. Si $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ et $g(x) = x^3$ alors

$$f \circ g(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 3} \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = \left(\frac{2x + 1}{x - 3}\right)^3.$$

4. Si $h(x) = \frac{2}{x^2+1}$ et $g(x) = x^2 + 1$, déterminer f pour que $h = f \circ g$.

Remarque. Il est important d'être **attentif et prudent vis-à-vis des ensembles de départs et d'arrivées** pour être certain que les opérations fassent sens.

Exercices à traiter : 1 et 2 page 141 (cf. méthode 1 page 141) ; 42 et 44 page 154 ; (facultatifs 41 et 45 page 154).

Maintenant que nous sommes capables de construire de nouvelles fonctions, il semble naturel de s'interroger quant à l'étude de leurs variations. Il nous faut donc apprendre à dériver des fonctions composées.

2.3.2 Dérivation de fonctions composées

Théorème 9 (Dérivation fonctions composées)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ avec I et J deux intervalles deux fonction dérivables, alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur J et*

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f' \circ g(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in J.$$

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 2.3.2. Si $g(x) = 3x^4 + 1$ et $f(x) = x^3$ alors $f \circ g(x) = (3x^4 + 1)^3$. Dans ce cas,

$$(f \circ g)'(x) = 12x^3 \times 3(3x^4 + 1)^2.$$

puisque $f'(x) = 3x^2$ et $g'(x) = 12x^3$.

Voyons maintenant ce qui se produit lorsque l'une des fonctions intervenant dans la composition est une fonction usuelle.

Proposition 10 (Dérivation de fonctions usuelles composées)**.** *Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable alors*

1. $(e^u)' = u' \times e^u$.

2. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$.
3. *Si* $n \in \mathbb{Z}_-$ *et* $u(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *alors* $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$.
4. *Si* $u(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *alors* $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
5. *Si* $u(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *alors* $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Remarque. 1. Finalement, ces formules montrent que pour dériver des fonctions composées impliquant u et des fonctions usuelles il suffit de savoir dériver $x \mapsto u(x)$.

2. Le lecteur aura reconnu dans le 2ème (lorsque $n = 2$) et dans le 4ème point une formule rencontrée plus tôt dans le cours.

Voyons quelques exemples de tout ceci.

Exemple 2.3.3. Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition, celui de dérivabilité puis une expression de f' à l'aide la proposition 10.

1. $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^3}$.
2. $f(x) = \sqrt{-2x+3}$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.
4. $f(x) = \left(\frac{4x+1}{2x-3}\right)^5$.
5. $f(x) = x - 2e^{x^2}$.
6. $f(x) = xe^{2x}$.

Exercices à traiter : 53-56 page 155 (cf. méthode 3 page 143).

Maintenant que nous savons dériver des fonctions composées, nous sommes en mesure d'étudier leurs variations. Débutons par un premier exemple.

Exemple 2.3.4. Soit $g(x) = e^{-4+5x}$.

1. Dériver $g(x)$ et étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$. Indiquer la nature des extremums.
3. Déterminer l'équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 1.

Traitons un deuxième exemple plus élaboré.

Exemple 2.3.5. Soit $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$. Déterminons le domaine de définition D_f de f : nous constatons que $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$ d'où $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. Observons ensuite que le schéma de composition de la fonction f s'obtient via les fonctions

$$u(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{avec} \quad x \neq 1 \quad \text{et} \quad g(x) = e^x \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}$$

puisque $f = g \circ u$. Pour déterminer f', il suffit d'utiliser la formule $(e^u)' = u' \times e^u$. Or,

$$u'(x) = \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 \quad \text{pour tout} \quad x \neq 1.$$

D'où $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \times e^{\frac{x}{x-1}}$. En outre, puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f'(x) < 0$ pour tout $x \neq 1$ et f admet les variations suivantes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	e	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e

Exercices à traiter : 8 page 143 (cf. méthode 4 page 143) ; 61 et 63 page 155. *Attention : lire* e^{x^2-2x} *au lieu de* e^{x2-2x}.

Il est temps de dresser un bref bilan du chapitre.

2.4 Bilan

Procédé algorithmique pour étudier les variations d'une fonction :

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Déterminer f'
3. Etudier le signe de f'
4. En déduire les variations de la fonction f ainsi que la nature des extremums locaux.

En particulier, il convient d'être à l'aise avec les calculs de dérivées ainsi que toutes les règles associées et de maitriser les tableaux de signes permettant l'étude du signe de $f'(x)$. Nous invitons donc le lecteur à s'entrainer à utiliser Δ (lorsque la dérivée implique des polynômes de degré 2) ou à factoriser pour établir le signe d'un produit ou d'un quotient. Il est aussi essentiel de maitriser l'étude de variations de fonctions impliquant l'exponentielle et de connaitre les propriétés algébriques qu'elle vérifie.