Chapitre 3

Principe de récurrence

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ jouit de propriétés assez remarquables (cf. section 3.1 pour plus de détails à ce sujet). Une conséquence de celles-ci est **le principe de récurrence** qui permet de montrer qu'une propriété est vraie pour **tous** les entiers naturels à partir d'un certain rang.

Voici une manière imagée de visualiser ceci. Supposons que nous disposions une famille infinie de dominos les uns à coté des autres avec les contraintes suivantes :

- lorsque nous poussons le premier domino, sa chute entraine celle du second domino.
- peu importe ou nous nous plaçons dans cette famille de dominos, nous savons que les dominos sont toujours placés de sorte que la chute de l'un d'entre eux entraine la chute du domino suivant.

Intuitivement, nous avons l'intuition que la chute du premier domino va forcément entrainer la chute du suivant, lequel va faire tomber le domino d'après et, finalement **toute** la famille (infinie) de dominos va chuter. Ce procédé permet démontrer de nombreux résultats.

Remarque. Un point de vue alternative aux dominos est d'imaginer un escalier : nous supposons que l'une des marches de l'escalier est atteignable et nous savons que, peu importe notre marche de départ, nous sommes toujours capable d'atteindre la marche suivante. Dans de telles conditions, nous alors sommes en mesure de gravir indéfiniment cet escalier (à partir de la marche initiale).

Notation : une propriété dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$ est notée $P(n)$.

Exemple 3.0.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons $P(n)$ la propriété

$$P(n) : \quad 2^n \geq 3.$$

Il se trouve qu'une propriété peut-être vraie ou fausse.

Exemple 3.0.2.

1. $P(0)$ est fausse car $2^0 \geq 3$ n'est pas vraie. De la même manière, $P(1)$ n'est pas vraie non plus puisque l'inégalité $2^1 \geq 3$ est fausse.
2. $P(2)$ est vraie en revanche, car $2^2 \geq 3$.
3. $P(n+1)$ correspond à l'inégalité $2^{n+1} \geq 3$ dans laquelle n a été remplacé par $n+1$.

Nous pouvons à présent énoncer le principe de récurrence.

Théorème 11 (Principe de récurrence)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété. Nous supposons que les points suivants sont satisfaits :*

- *(Initialisation) il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(n_0)$ est vraie.*
- *(Hérédité) si pour tout entier (quelconque) $N \geq n_0$ nous avons*

$$P(N) \Rightarrow P(N+1).$$

Autrement dit, si $P(N)$ est vraie alors, forcément $P(N+1)$ l'est également.

Conclusion : *la propriété $P(n)$ est alors vraie pour **tout** entier $n \geq n_0$.*

Remarque. Le point essentiel (et le plus délicat) est de montrer que la véracité de $P(N)$ entraine celle de $P(N+1)$ pour un entier N quelconque. Lorsque nous supposons que $P(N)$ est vraie, pour un certain entier N, nous parlerons **d'hypothèse de récurrence**.

Tout ceci semble un peu nébuleux, voici ce que cela donne sur quelques exemples.

Exemple 3.0.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons la propriété

$$P(n) : \quad 2^n > 3.$$

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

1. (Initialisation) $P(2)$ est vraie puisque $2^2 > 3$.
2. (Hypothèse de récurrence) Soit $N \geq 2$ un entier quelconque, nous supposons que $P(N)$ est vraie. Autrement dit,
$$2^N > 3$$
3. (Hérédité) Nous devons maintenant montrer $P(N+1)$ est vraie[1] C'est à dire, nous devons montrer que l'inégalité suivante est vérifiée :
$$2^{N+1} > 3$$
en utilisant l'hypothèse de récurrence faite à l'étape précédente (il convient alors de trouver comment passer de $P(N)$ à $P(N+1)$). Voyons cela, d'après l'hypothèse de récurrence, nous savons que
$$2^N > 3$$
d'où, en multipliant par 2 de chaque côté, nous en déduisons que
$$2^{N+1} > 2 \times 3 = 6.$$
Or, puisque $6 > 3$, ceci entraine que $2^{N+1} > 3$: $P(N+1)$ est vraie et nous avons établis que $P(N) \Rightarrow P(N+1)$.
4. En conclusion, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour $n \geq 2$.

Remarque. Il est essentiel que l'entier $n \in \mathbb{N}$ apparaisse en dehors de la propriété $P(n)$. Cela n'aurait aucun sens d'écrire « $P(n)$: $2^n > 3$ pour tout $n \geq 2$ ». Il est primordial de mettre en évidence les différentes étapes de la démonstration (quitte éventuellement à laisser des « trous » dans sa copie sur les points que le lecteur n'aura pas su établir, il montrera ainsi qu'il connait la structure du raisonnement.

Voyons d'autres exemples permettant de se familiariser avec ce nouveau principe de démonstration.

Exemple 3.0.4.
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=0}^{n} k$ et démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et
$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -3$.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0.8$ et
$$u_{n+1} = u_n^2 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Démontrons par récurrence que pour tout (v_n) est une suite décroissante.

Voyons à présent un résultat (qui servira dans un chapitre ultérieur) dont la démonstration s'effectue par récurrence.

1. C'est le point le plus délicat car il n'existe pas de véritable méthode permettant de savoir comment démarrer la démonstration. Le lecteur devra retenir les exemples vus en classe pour étoffer sa boite à idées.

Proposition 12 (Inégalité de Bernoulli)**.** *Soit $a > -1$ alors*

$$(1+a)^n \geq 1 + na \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.0.1}$$

Démonstration. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: $(1+a)^n \geq 1 + na$ et démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. (Initialisation) Il est évident que $P(0)$ est vraie.
2. (Hypothèse de récurrence), supposons que $P(N)$ soit vraie pour un certain entier $N \geq 0$.
3. (Hérédité) Démontrons que $P(N) \Rightarrow P(N+1)$. A cet effet, observons que

   $$(1+a)^N \geq 1 + Na$$

   D'où, en multipliant par cette inégalité par $1+a$ (qui est un nombre positif puisque $a > -1$) nous avons

   $$(1+a)^{N+1} \geq (1+Na)(1+a) = 1 + a + Na + Na^2 = 1 + (N+1)a + Na^2 \geq 1 + (N+1)a$$

   puisque $Na^2 > 0$. Nous avons donc établi que

   $$(1+a)^{N+1} \geq 1 + (N+1)a$$

   qui correspond bien à $P(N+1)$.
4. Conclusion : d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

□

Remarque. **Cette remarque peut-être omise en première lecture**. En faisant une hypothèse plus forte : $a > 0$ (au lieu de $a > -1$), le lecteur astucieux constatera qu'il est possible de démontrer l'inégalité de Bernoulli directement (sans faire de récurrence) en utilisant la formule du binôme. A cet effet, il conviendra de démontrer la proposition suivante.

Proposition 13 (Formule du binôme)*. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La formule suivante est satisfaite*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{3.0.2}$$

où les coefficients binomiaux $\binom{k}{n}$ sont définis dans l'équation 4.4.1 de la remarque 4.4.

Démonstration. La démonstration de ce point se fait par récurrence sur n. Durant l'étape d'hérédité, il conviendra de procéder à un changement d'indice (décalage d'indice) et d'utiliser la formule de Pascal (qu'il faudra alors démontrer) : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \geq n$, nous avons

$$\binom{k}{n} + \binom{k+1}{n} = \binom{k+1}{n+1}. \tag{3.0.3}$$

□

Une fois la formule du binôme à disposition, il ne reste plus qu'à procéder à une minoration astucieuse de la somme pour obtenir l'inégalité de Bernoulli (3.0.1).

3.1 Axiomes de Peano (pour aller plus loin)

Le principe de récurrence pousse à s'interroger sur les entiers naturels et l'ensemble $\mathbb{N}$ (à partir duquel, il devient possible de construire successivement les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$). Ce qui est raconté ci-dessous est tiré de [**?**].

Comment définir $\mathbb{N}$? Quel est cet ensemble ? Pourquoi a-t-on $a(b+c) = ab + ac$ lorsque $a, b, c \in \mathbb{N}$?

Ces questions peuvent sembler un peu étranges au premier regard. Par analogie, le lecteur pourra se demander quel est la différence entre savoir utiliser un ordinateur et savoir construire un ordinateur. Sans nul doute, la première proposition, tout comme l'utilisation des entiers naturels, lui est plutôt familière. La seconde probablement moins. Le problème, face à ce genre de questionnement est de se retrouver confronter à quelque chose que nous utilisons depuis trop longtemps, sans y songer et que tout nous semble trivial (alors que de nombreux points méritent une véritable démonstration). Pour que cette réflexion soit féconde, il convient alors de rester humble et de revenir à des choses qui semblent parfois très terre à terre.

Définition 3.1.1. *L'ensemble des entiers naturels est*

$$\mathbb{N} = \{0 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad \} \tag{3.1.1}$$

Ainsi, un entier naturel est un élément de la liste (3.1.1). Malheureusement, ça ne permet pas bien de répondre à nos questions initiales. Peut-être qu'il est plus intuitif de dire : « pour obtenir $\mathbb{N}$, il suffit de commencer à compter jusqu'à l'infini à partir de 0 ».

Bien que plus intuitif, ce point de vue soulève quelques questions :

- pourquoi est-il possible de compter jusqu'à l'infini ?
- pourquoi ne pouvons-nous pas retomber sur 0 au bout d'un moment ?
- en quoi cela nous permet-il de savoir faire des additions, des multiplications ou des puissances d'entiers naturels ?

Nous allons essayer d'expliquer comment répondre à ces interrogations et de mettre en évidence ce qui caractérise l'ensemble $\mathbb{N}$. Pour cela, deux concepts sont nécessaires : l'élément 0 et la notion de successeur. Si $n \in \mathbb{N}$, nous noterons son successeur $n++$. Ainsi,

$$2++=3 \quad ; \quad 3++=4 \quad ; \quad \dots$$

Il semble donc que l'ensemble $\mathbb{N}$ soit composé de

$$0 \quad ; \quad 0++ \quad ; \quad (0++)++ \quad ; \quad \big((0++)++\big)++ \quad ; \quad \dots$$

que nous renommons, pour plus de confort de lecture, respectivement $0 ; 1 ; 2 ; 3 : \dots$. Il apparait alors naturel d'imposer à l'ensemble $\mathbb{N}$ les axiomes suivants.

Axiome 3.1.1. *1.* $0 \in \mathbb{N}$

2. Si $n \in \mathbb{N}$ *alors* $n++ \in \mathbb{N}$.

Cependant, seuls, ces deux axiomes n'empêchent pas d'avoir un ensemble « circulaire ». Il pourrait s'agir, par exemple, d'un ensemble, où partant de 0, les successeurs suivants nous mènent jusqu'à 3 puis nous retournons en 0 (comme une mesure en quatre temps en musique finalement). Il nous faut donc ajouter un axiome supplémentaire pour éviter cela.

Axiome 3.1.2. 0 *est le successeur de personne. Autrement dit, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n++ \neq 0$.

Remarque. Le lecteur pourra essayer de démontrer que $4 \neq 0$ à partir des axiomes précédents.

Surgit alors un nouveau problème. Qu'est-ce qui empêcherait l'ensemble $\mathbb{N}$ de s'arrêter à un plafond à un moment donné. Plus précisément, est-il possible qu'en partant de 0, nous obtenions 1, puis 2, 3 et finissions par être bloqué indéfiniment à 4 ? Parmi les conditions imposées par nos 3 axiomes, rien ne nous interdit cela. Il nous faut alors un axiome supplémentaire.

Axiome 3.1.3. *Si pour tout entier naturels* $n \neq m$ *alors* $n++ \neq m++$. *De manière équivalente,*

$$n++=m++ \quad \Rightarrow n=m.$$

Remarque. Ceci nous assure que les entiers naturels sont tous distincts. Le lecteur pourra alors chercher à démontrer que $6 \neq 2$.

Voici un autre problème qui pourrait survenir. Et si $\mathbb{N}$ était composé d'autres nombres et pas seulement que des entiers ? Après tout, nous pourrions bien avoir

$$\mathbb{N} = \{0 \quad ; \quad 0,5 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 1,5 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 2,5 \quad ; \quad \dots\}$$

Pour que ceci ne puisse se produire, il nous faut donc expliquer ce que signifie le fait que les entiers naturels soient tous obtenus à partir de 0 en construisant successivement ses successeurs. C'est ici qu'intervient le principe de récurrence décrit au début de ce chapitre.

Axiome 3.1.4 (Principe de récurrence)**.** *Soit* $P(n)$ *une propriété liée à un entier* n. *Supposons que* $P(0)$ *soit vraie et que lorsque* $P(n)$ *est vraie alors* $P(n++)$ *l'est également. Dans ce cas,* $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Comme nous l'avons expliqué plus tôt, ce procédé de récurrence va nous permettre d'obtenir les entiers de proche en proche. Il va également nous permettre de justifier qu'il n'est pas possible de $\mathbb{N}$ contienne des demi-entiers comme nous l'avions proposé quelques lignes plus haut. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et posons

$$P(n) \quad : \quad n \quad \text{n'est pas un demi-entier.}$$

le principe de récurrence (dont nous omettons la démonstration) nous assure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des cinq axiomes que nous venons de décrire sont les propriétés caractéristiques de $\mathbb{N}$. A partir de celles-ci, il devient possible de définir l'addition d'entiers, puis la multiplication, etc.... ainsi que les propriétés d'associativité, de distributivité, de commutativité de ces opérations. Nous ne détaillerons pas tout ceci et renvoyons le lecteur curieux vers [**?**]. Il est à noter que nous n'avons donné qu'une définition axiomatique de $\mathbb{N}$ et non une définition constructive de cet ensemble. Il est possible, à partir de la théorie des ensembles de construire $\mathbb{N}$ par récurrence en utilisant la méthode de Von Neumann.

3.2 Descente infinie de Fermat (pour aller plus loin)

Le mathématicien Pierre de Fermat a proposé une variante du principe de récurrence. Celle-ci peut se voir de la manière suivante : alors que le principe de récurrence permet d'établir qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, **la descente infinie de Fermat permet de montrer qu'une propriété n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$**. Le principe repose sur l'idée suivante : **une suite d'entiers naturels strictement décroissante est finie**.

Remarque. Ceci est lié au fait que tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Proposition 14 (Descente infinie)**.** *Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de supposer, par l'absurde, que $P(n)$ est vraie et de montrer qu'il existe $m < n$ telle que $P(m)$ soit vraie.*

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 3.2.1. Nous allons montrer, par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, supposons le contraire. Il existe donc deux entiers naturels $p, q \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 - 2q^2 = 0. \tag{3.2.1}$$

Forcément $0 < q < p$ (sinon le quotient serait plus petit que 1) et $p < 2q$ (sinon nous aurions $p^2 > 4q^2 \iff \frac{p^2}{q^2} = 2 > 4$ ce qui est absurde). Posons alors

$$p' = 2q - p > 0 \quad \text{et} \quad q' = p - q > 0.$$

Nous obtenons alors $p'^2 - 2q'^2 = \ldots = 2q^2 - p^2 = 0$. Autrement dit,

$$\frac{p'^2}{q'^2} = 2.$$

Or $q' = p - q = q - (2q - p) < q$ puisque $2q - p > 0$. Nous pourrions alors reproduire notre raisonnement (en remplaçant p et q par p' et q') et ainsi construire une suite infinie, strictement décroissante, d'entiers naturels vérifiant (3.2.1) ce qui serait absurde. En conclusion, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Remarque.
1. Il est à noter que la démonstration précédente n'utilise aucune règle de divisibilité (contrairement à la démonstration proposée en classe de seconde) pour établir l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
2. En langage mathématique plus moderne, la construction de la suite infinie précédente semble un peu lourde. Nous modifierons alors la preuve légèrement. Dès le départ, nous choisissons q comme étant le plus petit entier vérifiant (3.2.1) et, avec les même arguments, nous produisons un second entier $q' < q$ vérifiant (3.2.1), ce qui est absurde.