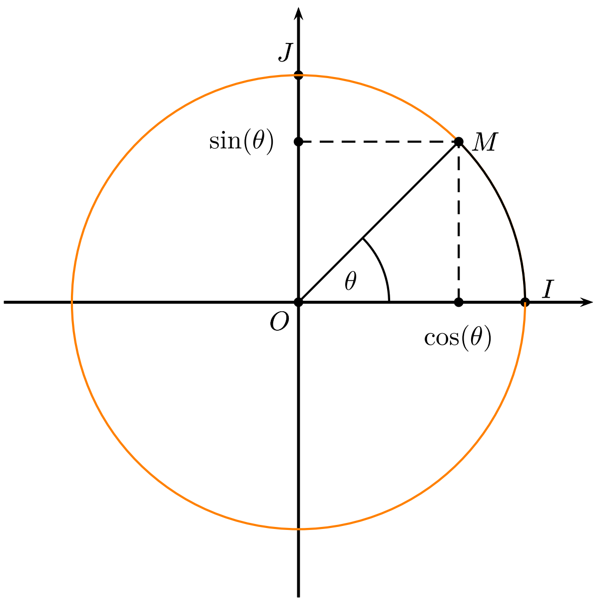
Chapitre 4

Fonctions trigonométriques

Cette section a pour objectif d'étudier les variations de fonctions trigonométriques rencontrées en class de première dans le contexte du produit scalaire. Procédons d'abords à quelques rappels avant de voir de quelle manière ces fonctions se dérivent et comment étudier leurs variations.

4.1 Cercle trigonométrique et valeurs remarquables

Un cercle trigonométrique est un cercle, centré en l'origine, de rayon 1 [1] (i.e. $OI = OJ = 1$ ci-dessous), sur lequel il est possible de lire le cosinus ou le sinus d'un angle orienté :



Remarque. Les fonctions $\theta \mapsto \cos(\theta)$ et $\theta \mapsto \sin(\theta)$ étant 2π-périodiques, la mesure d'un angle θ est à comprendre modulo 2π. Par exemple, le lecteur pourra vérifier que les angles

$$\frac{25\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4}$$

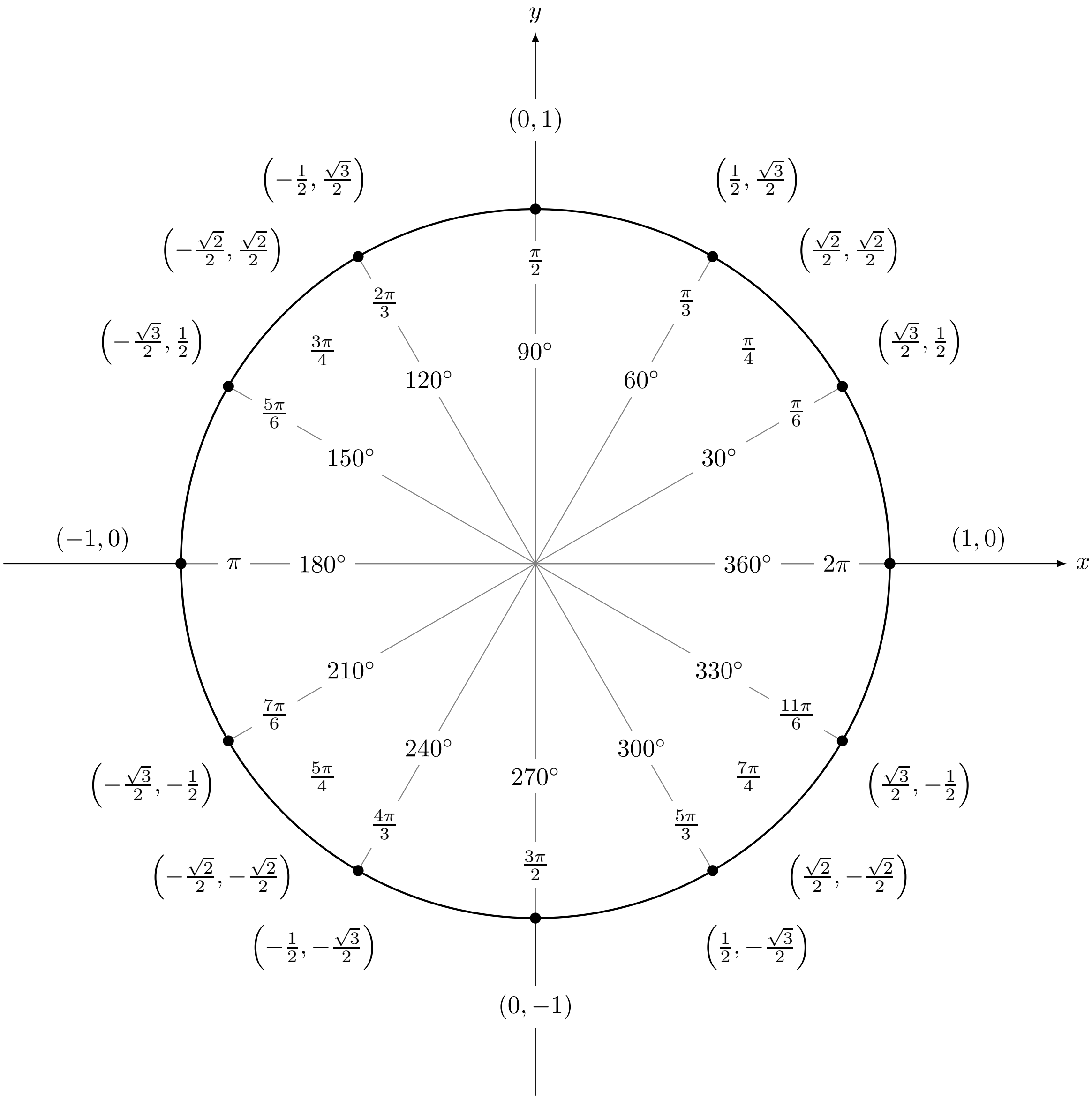
1. En particulier, nous avons $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cos(x) \in [-1; 1]$ et $\sin(x) \in [-1; 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

correspondent au même point du cercle trigonométrique. Nous dirons donc que $\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π. Mathématiquement, cela signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ (correspondant au nombre de tours superflus) tel que

$$\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Ici, $k = 3$ puisque pour passer de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{25\pi}{4}$ il suffit d'ajouter $k = 3$ tours dans le sens direct.

Concernant les fonctions trigonométriques, il est important de connaitre quelques valeurs remarquables. Celles-ci sont données sur le graphique ci-dessous :



Remarque. Sur la figure précédente, l'abscisse de chaque point fourni la valeur du cosinus de l'angle correspondant et l'ordonnée la valeur du sinus. Par exemple, le point $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ permet de savoir que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De manière plus synthétique, cela revient à connaitre par coeur les valeurs suivantes :

θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les autres valeurs peuvent être retrouvées de manière élémentaire à l'aide d'arguments géométriques tels que

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad ; \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad ; \quad \ldots$$

4.2 Résolutions d'équations ou inéquations trigonométrique

4.2.1 Equations trigonométriques

Il est essentiel de savoir résoudre des équations de la forme

$$\cos(x) = u \quad \text{ou} \quad \sin(x) = u \quad \text{avec} \quad u \in [-1;1]$$

Autrement dit, lorsque u est une valeur donnée, il faut trouver l'ensemble des réels x satisfaisant les équations précédentes. Pour résoudre, ceci nous avons le résultat suivant

Proposition 15. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons les relations suivantes :*

- $\cos(x) = \cos(a) \iff \{x = \pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin(x) = \sin(a) \iff \{x = a + 2k\pi \quad \textit{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque. En pratique pour résoudre $\cos(x) = u$ il faudra d'abord trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(a) = u$ pour ensuite appliquer le résultat précédent. En règle général, les choses sont relativement simples à condition de savoir utiliser un cercle trigonométrique et de connaitre les valeurs remarquables associées au sinus et au cosinus.

Voyons comment mettre ceci en oeuvre sur des exemples.

Exemple 4.2.1. 1. Pour résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, il suffit d'observer que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, d'après la proposition précédente, nous savons que

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Résolvons $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans un premier temps, posons $x' = 2x + \frac{\pi}{4}$. Nous équation devient alors

$$\cos(x') = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, nous obtenons

$$x' = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x' = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Il suffit ensuite de revenir à la variable x :

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Pour conclure que l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{x = -\frac{\pi}{24} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = -\frac{5\pi}{24} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercices à traiter : 5 et 6 page 87 puis 45 et 46 page 93 (cf. méthode 2 page 87).

4.2.2 Inéquations trigonométriques

La méthode pour résoudre une inéquation trigonométrique diffère très peu de la méthode pour résoudre des équations trigonométriques.

Proposition 16. *Soit $a \in \mathbb{R}$ alors*

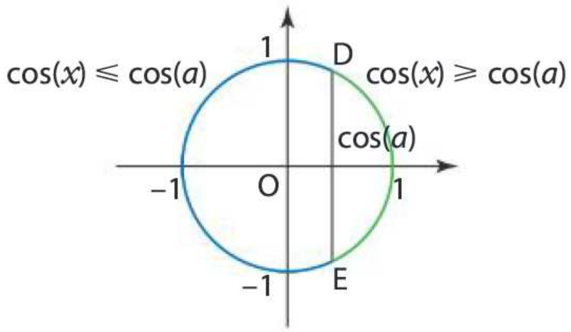
- *les solutions de $\cos(x) \leqslant \cos(a)$ sont les nombres vérifiant*

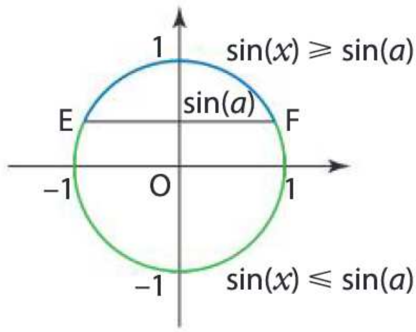
$$a + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi - a + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- *les solutions de $\sin(x) \leqslant \cos(a)$ sont les nombres vérifiant*

$$-\pi - a + 2k\pi \leqslant x \leqslant a + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Graphiquement :





Voyons cela sur un exemple.

Exemple 4.2.2. Résolvons $\cos(x) < \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0 : 2\pi[$. Pour cela, il suffit de trouver quels sont les angles $\theta \in [0; 2\pi[$ pour lesquels $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Nous constatons qu'il faut choisir $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

Pour conclure, il suffit d'observer sur le cercle trigonométrique que si $x \in]\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}[$ alors $\cos(x) < \frac{1}{2}$.

Exercices à traiter : 7 et 8 page 87 puis 47 et 48 page 93 (cf. méthode 2 page 87).

4.3 Dérivations des fonctions trigonométriques

Puisque nous souhaitons étudier les variations d'une fonction trigonométrique, il est nécessaire de savoir comment calculer leurs dérivées.

Proposition 17. *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus*

$$\big(\cos(x)\big)' = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \big(\sin(x)\big)' = \cos(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

En outre, si u est une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors

$$\big(\cos[u(x)]\big)' = u'(x) \times \big(-\sin(x)\big) \quad \text{et} \quad \big(\sin[u(x)]\big)' = u'(x) \times \cos(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in I.$$

Remarque. Un moyen mnémotechnique pour retenir certaines de ces formules et le suivant : pour dériver, nous passons d'un axe à l'autre **en tournant dans le sens horaire**. Par exemple, **le sinus** (positif) d'un angle se lit sur la partie positive de l'axe des ordonnées. Ainsi, en tournant dans le sens horaire nous arrivons sur la partie positive de l'axe des abscisses qui permet de lire le **cosinus** (positif) d'un angle : d'où $\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$. Si nous poursuivons ce raisonnement, en tournant une fois de plus nous atterrissons sur la partie correspondant aux **sinus négatifs**, ainsi : $\big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$. Et ainsi de suite.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 4.3.1.
1. si $f(x) = \sin(5x + 1)$ alors $f'(x) = 5\cos(5x + 1)$.
2. Si $g(x) = \cos(3x^2 + 5x - 1)$ alors $g'(x) = -(6x + 5)\sin(3x^2 + 5x - 1)$.

Exercices à traiter : 1 à 4 page 85 et 40 à 43 page 93 (cf. méthode 1 et 2 page 85).

4.3.1 Etudes de variations de fonctions trigonométriques

Nous pouvons dès à présent étudier les variations des fonctions sinus et cosinus pour ensuite s'attaquer à des fonctions plus élaborées. Signalons que puisque les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodique, il suffit de se restreindre à un intervalle I de longueur de π pour les étudier ; $I = [-\pi; \pi]$ par exemple.

Proposition 18. *Les variations de $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont données ci-dessous :*

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

et

x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Traitons un exemple un peu plus élaboré.

Exemple 4.3.2. Soit $f(x) = \sin(x)\cos(x)$. L'étude des variations de cette fonction s'effectue en plusieurs étapes.

1. Tout d'abord, $f(x+\pi) = \sin(x+\pi) \times \cos(x+\pi) = -\sin(x) \times -\cos(x)$ ainsi f est π périodique et nous pouvons l'étudie sur un intervalle de longueur π, $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par exemple.
2. De plus, $f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$ puisque $x \mapsto (x)$ est une fonction paire[2] et $x \mapsto \sin(x)$ est une fonction impaire[3]. Autrement dit f est une fonction impaire. Nous pouvons donc nous restreindre à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puisqu'il suffira de procéder à une symétrie centrale (par rapport à l'origine) pour obtenir le comportement de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
3. Observons que $f'(x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$. En outre puisque $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ nous en déduisons que
$$f'(x) = 2\cos^2(x) - 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$
4. Pour étudier le signe de $f'(x)$, nous devons résoudre
$$f'(x) \geqslant 0 \iff \cos^2(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff \cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
puisque $\cos(x) \geqslant 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. En outre, en utilisant le cercle trigonométrique, nous avons
$$\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$
5. D'après ce qui précède nous avons donc

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Exercices à traiter : 9 et 10 page 88 (cf. méthode 4 page 88).

2. i.e. $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
3. i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.4 Fonctions hyperboliques : (pour aller plus loin)

Il existe des fonctions dites hyperboliques : celles-ci font intervenir la fonction exponentielle et ont été inventé par le mathématicien Riccati dans les années 1760. .

Définition 4.4.1. *1. La fonction cosinus hyperbolique est notée* $\mathrm{ch}(x)$ *et est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction sinus hyperbolique est notée $\mathrm{sh}(x)$ *et est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le lecteur alors inviter à étudier les variations de ces fonctions sur $\mathbb{R}$. Il pourra au passage vérifier les identités suivantes :

$$\big(\mathrm{ch}(x)\big)' = \mathrm{sh}(x) \quad ; \quad \big(\mathrm{sh}(x)\big)' = -\mathrm{ch}(x) \quad ; \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

De nombreux exercices peuvent être proposés sur ce thème :

- étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction tangente hyperbolique définie par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- chercher à déterminer les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques (après avoir traiter le cas des fonctions trigonométriques).
- ...