Chapitre 5

Limite de Suites

Nous avons mentionné plus tôt que les suites permettant de modéliser des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des objets qui évoluent au cours du temps (lequel étant modélisé par l'indice n). Il semble assez naturel de s'interroger quant au comportement de u_n lorsque n devient de plus en plus grand. Autrement dit, nous nous demandons ce qui se produit lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = ?$$

Un moment de réflexion suggère que plusieurs cas de figures sont envisageables.

Exemple 5.0.1. 1. Les termes de la suite semblent s'accumuler près d'une valeur : si $u_n = \frac{1}{n} + 1$ pour $n \geq 1$ nous avons alors

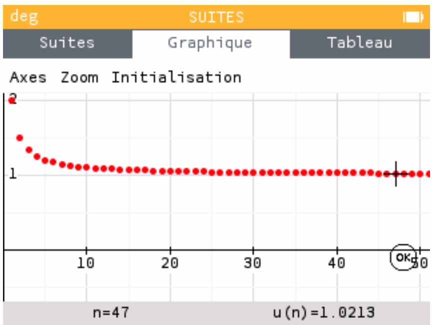


FIGURE 5.1 – Graphique associé à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. Les valeurs semblent devenir de plus en plus grandes et positives : si $v_n = e^{0,2n}$ pour $n \geq 0$ nous avons alors

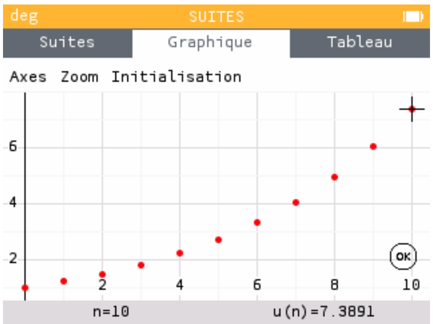


FIGURE 5.2 – Graphique associé à la suite $v_n = e^{0,2n}$

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. Les valeurs semblent devenir de plus en plus grandes et négatives : si $w_n = -n^2$ pour $n \geq 0$ alors nous avons

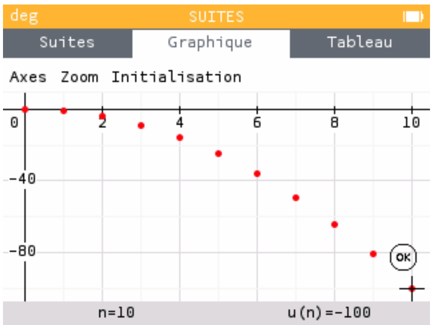


FIGURE 5.3 – Graphique associé à la suite $w_n = -n^2$

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

4. Les points semblent se disperser dans deux directions (des nombres très grands et positifs ainsi que des nombres très grands et négatifs) : si $t_n = (-2)^n$ pour $n \geq 0$ alors nous avons

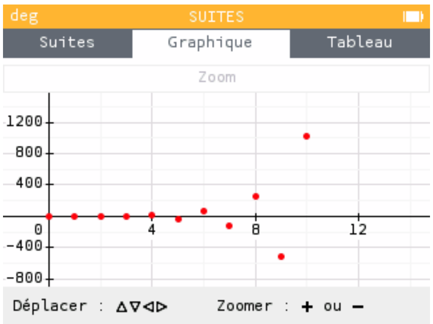


FIGURE 5.4 – Graphique associé à la suite $(t_n)_{n\geq 0}$

Il semblerait que la limite $\lim_{n+\infty} t_n$ n'existe pas.

Vocabulaire :

- Lorsque u_n se rapproche d'une valeur finie $l \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$, nous dirons que u_n **converge vers** l.
- Lorsque u_n se rapproche de $\pm\infty$ lorsque $n \to +\infty$, nous dirons que u_n **diverge**.

Voyons comment définir la notion de convergence ou de divergence de manière plus rigoureuse à partir des exemples présentés plus tôt.

Définition 5.0.1. *Soit (u_n) une suite numérique.*

1. *Si pour tout $A > 0$ (aussi grand que souhaité), l'intervalle ouvert $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0, nous dirons que*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
2. *Si pour tout $B < 0$ (aussi petit[1] que souhaité), l'intervalle ouvert $]-\infty, B[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0, nous dirons que*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$
3. *Soit $l \in \mathbb{R}$, si tout intervalle ouvert I centré en l contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, nous dirons que*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$
Dans ce cas, la limite l est unique.

Remarque. Reprenons les figures de l'exemple 5.0.1 pour voir s'ils correspondent bien aux définitions proposées :

- (1^{er} exemple) Peu importe l'intervalle ouvert I centré en 1, nous constatons que celui-ci contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Nous avons donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- ($2^{\text{ème}}$ exemple) Peu importe $A > 0$, l'intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Nous avons donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- ($3^{\text{ème}}$ exemple) Peu importe $B < 0$, l'intervalle ouvert $]-\infty; B[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Nous avons donc $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.
- ($4^{\text{ème}}$ exemple) la suite (t_n) n'admet aucune limite (finie ou infinie). C'est aussi le cas de la suite $z_n = (-1)^n$ dont les termes alternent entre $+1$ et -1.

Voyons de quelle manière ceci s'utilise en pratique.

Exemple 5.0.2. 1. Montrons que la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = n^2 - 4$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Pour établir ceci, nous devons montrer que pour tout $A > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ nous avons
$$u_n > A.$$

1. Précisons que ce nombre sera placé très loin parmi les nombres négatifs, par exemple $B = -10^{12}$.

Pour cela, il suffit de résoudre l'inégalité, $u_n > A$.

$$n^2 - 4 > A \iff n^2 > A + 4 \iff n > \sqrt{A+4}$$

puisque $n \in \mathbb{N}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction croissante. Il suffit alors de choisir $n_0 = \lfloor A + 4 \rfloor + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre.

2. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 3$ et $w_n = 2w_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La calculatrice semble indiquer que cette suite tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Nous cherchons à proposer un algorithme (en langage Python) qui nous donne le premier indice à partir duquel la suite dépasse un seuil donné (ici le seuil sera 1000).

```
n=0
w=3
while w=< 1000 :
    n=n+1
    w=2*w+1
print(n)
```

Exercice à traiter : 6 page 19 ; 8 page 19 à faire à la maison ; (Méthode 3 page 19) ; facultatifs : 52 et 53 page 30/31.

Les définitions formelles de limites ne sont pas très pratiques à l'usage. Nous allons voir simplifier ceci en se référant à un catalogue de limites (issues du comportement des suites usuelles) auquel nous combinerons des règles de calculs sur les limites.

5.1 Opérations sur les limites

Débutons par la limite d'une somme.

Proposition 18 (Limite d'une somme)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et $l, l' \in \mathbb{R}$ deux nombres réels.*

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*

Remarque. Il faut retenir qu'une limite de la forme $+\infty - \infty$ est dite **indéterminée** : tout peut se produire et il est nécessaire de fournir un travail supplémentaire afin de lever l'indétermination.

Voyons cela sur des exemples.

Exemple 5.1.1. Si $u_n = n^2$ et $v_n = n + 3$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.

Exercices à traiter : 9 (Qa) page 21 et 54 (Qa et Qb) page 31 (cf. Méthode 4 page 21) ; 55 page 31 à faire à la maison.

En revanche, ces règles ne sont pas toujours suffisantes.

Exemple 5.1.2. Si $u_n = n^3$ et $v_n = -n$ alors la limite est indéterminée[2]. Pour lever cette indétermination, nous allons avoir besoin de nouvelles règles.

Passons à présent au cas de la limite d'un produit.

Proposition 19 (Limite d'un produit)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et $l, l' \in \mathbb{R}$ deux nombres réels.*

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$l \times l'$	$\mathrm{sgn}(l) \times \infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*

Remarque. Il faut retenir qu'une limite de la forme $0 \times \pm\infty$ est dite **indéterminée** : tout peut se produire et il est nécessaire de fournir un travail supplémentaire afin de lever l'indétermination.

Voyons ceci sur un exemple.

Exemple 5.1.3.
1. Si $u_n = -\sqrt{n}$ et $v_n = n^2$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n = -\infty$.
2. Si $u_n = -3$ et $v_n = -e^n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$.

2. Nous avons tout de même le pressentiment que u_n sera plus gros que v_n lorsque $n \to +\infty$ et donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.

Exercices à traiter : Déterminer la limite de $a_n = n \times \sqrt{n}$ et de $b_n = (n^2+3n-1)\times(-n^4+3)$ lorsque $n \to +\infty$.

Etudions maintenant le comportement d'une limite et du passage à l'inverse. Avant cela précisons le sens de deux notations.

Définition 5.1.1. *1. Nous dirons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ lorsque u_n se rapproche de 0 par valeurs supérieures :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \textit{et} \quad u_n > 0 \quad \textit{à partir d'un certain rang } n_0.$$

2. Nous dirons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^-$ lorsque u_n se rapproche de 0 par valeurs inférieures :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \textit{et} \quad u_n < 0 \quad \textit{à partir d'un certain rang } n_0.$$

Voyons ceci sur un exemple.

Exemple 5.1.4. Si $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$. Tandis que si $v_n = -\frac{1}{n^3}$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0^-$.

Remarque. A force d'exemples, le lecteur aura constater[3] que pour tout $p > 0$ nous avons

$$\lim_{n+\to+\infty} n^p = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

Ceci nous permet maintenant d'énoncer le résultat suivant.

Proposition 20 (Inverse d'une limite)**.** *Soient (u_n) une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$.*

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque. Nous voyons qu'il était nécessaire de préciser si u_n tend vers 0 par valeurs supérieures ou inférieures.

Passons à présent au cas des quotients.

Proposition 21 (Limite d'un quotient)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques*[4] *et $l, l' \in \mathbb{R}$ deux nombres réels.*

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$\operatorname{sgn}(l) \times +\infty$	$\operatorname{sgn}(l) \times -\infty$	*F.I.*

et

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	*F.I.*

Remarque. Il faut retenir qu'une limite de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ est dite **indéterminée** : tout peut se produire et il est nécessaire de fournir un travail supplémentaire afin de lever l'indétermination.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 5.1.5. 1. La suite $u_n = \frac{3}{4n-5}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ car

$$\lim_{n+\infty} 3 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 4n - 5 = +\infty.$$

2. La suite $v_n = \frac{3+\frac{1}{n}}{2n+n^2}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ car

$$\lim_{n+\infty} 2n + n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3.$$

3. Il est à noter que les affirmations ci-dessous sont des résultats mathématiques qu'il convient de démontrer mais cela est du ressort du programme de l'enseignement supérieur.

4. Implicitement, il est supposé qu'à partir d'un certain rang n_0, $v_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$ de sorte que le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ fasse sens lors de l'étude de la limite en $+\infty$.

3. Soit la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$t_n = \frac{3n+1}{2n+4} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Quelques calculs permettent facilement de vérifier que

$$u_n = \frac{3}{2} - \frac{5}{2n+4} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La fonction tableur de la calculatrice montre ensuite que $\frac{5}{2n+4}$ se rapproche de plus en plus de 0 lorsque $n \to +\infty$. Nous en concluons donc que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

et nous laissons le soin au lecteur de vérifier à la main que c'est bien le cas.

Exercices à traiter : 54 (Qc), 56 page 31 page 31; 57 page 31 à faire à la maison.

Mise en garde sur les limites

Bien qu'il semble y avoir de nombreuses règles, le lecteur aura constater qu'elles sont toutes ces règles sont naturelles. Il faut cependant être prudent et retenir **quatre exceptions** pour lesquelles il n'est pas possible de conclure directement sans travail supplémentaire (les formes indéterminées) : il s'agit des limites de la forme

$$\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Ce problème est dû au fait que certaines suites tendent plus vite vers 0 ou l'infini que d'autres; cette notion vitesse fait qu'une limite peut alors l'emporter sur l'autre.

Exemple 5.1.6. 1. Cherchons à déterminer la limite du quotient suivant

$$\lim_{n+\infty} \frac{n^3+1}{n+1} =?$$

Il semblerait que l'infini du numérateur est « plus grand » que celui du dénominateur. Factorisons alors numérateur et dénominateur par le terme le plus « gros » en $+\infty$:

$$\frac{n^3+2}{n+3} = \frac{n^3(1+\frac{2}{n^3})}{n(1+\frac{3}{n})} = \frac{n^3}{n} \times \frac{1+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{3}{n}} = n^2 \times \frac{1+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{3}{n}}.$$

Comme le quotient intervenant dans la dernière égalité tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$, nous en déduisons que

$$\lim_{n+\infty} \frac{n^3+1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

ce qui était pressenti.

2. Montrer à présent le résultat suivant

$$\lim_{n+\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1} = 0$$

En effet, cette fois-ci nous avons l'impression que l'infini du numérateur est « plus petit » que celui du dénominateur. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier cela en mettant en oeuvre la méthode de factorisation de l'exemple précédent.

Exercices à traiter : 58,59,60,61 page 31 (Méthode 5 page 21).
Voyons maintenant le cas particulier des limites de suites géométriques.

5.2 Limites et suites géométriques

Pour déterminer la limite d'une suite géométrique $u_n = u_0 q^n$, il suffit de connaitre la limite de q_n et d'utiliser les règles d'opérations sur les limites.

Proposition 22 (Limite suite géométrique)**.** *Soit $q \in \mathbb{R}$ alors*

- *si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
- *si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*
- *si $q \leq -1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.*

Démonstration. La démonstration repose sur le théorème de comparaison (cf. théorème) et sur le théorème des gendarmes 24 qui sera énoncé dans la section suivante.

1. Traitons le deuxième point. Soit $q > 1$ alors, d'après l'inégalité de Bernoulli (cf. proposition 12), nous avons

$$q^n \geq 1 + n(q-1) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

   Ainsi, d'après le théorème 23, nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ puisque $\lim_{n\to+\infty} 1 + n(q-1)$.

2. Traitons le premier point en deux temps.

   (a) Tout d'abord, nous supposons que $0 < q < 1$. Posons alors $p = \frac{1}{q}$ ainsi $p > 1$ et d'après l'assertion précédente nous savons que

$$\lim_{n\to+\infty} p^n = +\infty.$$

   D'où, en passant à l'inverse, nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

   (b) Si maintenant $-1 < q < 0$, il suffit de poser $s = -q$. D'une part cela permet, grâce à l'assertion précédente de nous assurer que $\lim_{n\to+\infty} s^n = 0$. Puis, d'autre part, puisque $q = -s$, nous avons aussi $q^n = (-s)^n = (-1)^n s^n$ d'où

$$-s^n \leq q^n \leq s^n \quad \text{pour tout} n \geq 0.$$

   Le théorème des gendarmes 24 permet alors de conclure.

□

Exercices à traiter : 71 page 32 et 76 page 32 ; à la maison : 72 et 77 page 32.

Mettons ceci en oeuvre sur plusieurs exemples.

Exemple 5.2.1. 1. Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n = 100 \times (0,9)^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

modélise l'évolution d'une population d'hérissons. Alors, puisque $100 > 0$ et $q = 0,9 \in]0;1[$ nous en déduisons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Autrement dit, au bout d'un certain temps, la population d'hérissons va s'éteindre.

2. Soit $v_n = -3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $-3 < 0$ et $q = 2 > 1$ nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$$

Exercices à traiter : 24 page 27 (cf. Méthode 11 page 27)

Somme partielle d'une suite géométrique

Comme nous l'avons rappelé dans le premier chapitre (cf. proposition 1), nous serons parfois amener à additionner les n premiers termes d'une suite géométrique. Il est alors intéressant de connaitre ce qui se produit lorsque $n \to +\infty$. A ce sujet nous avons le résultat suivant.

Voyons cela sur un exemple.

Propriété Pour tout nombre réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n, on a :

Somme des termes de la suite de terme général q^n	Somme des termes de la suite de terme général $u_n = u_0 \times q^n$
$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\dots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$	$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+\ldots+u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Si $0<q<1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$ Si $q>1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$	Si $0<q<1$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$ Si $q>1$, si $u_0>0$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ si $u_0<0$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

Exemple 5.2.2. Imaginons que nous ayons à disposition une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que u_n représente la quantité d'énergie produite par un panneau photovoltaïque durant l'année $2018+n$. Supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ soit une suite géométrique de raison $q = 0,97$ et de premier terme $u_0 = 1900\, kWh/m^2$ (ce qui correspond à l'énergie produite en 2018 après l'installation).

Nous posons alors la question suivante : en conservant cette installation très longtemps, est-il possible que le particulier puisse espérer produire plus de $70\, MWh$ à compter du 1er janvier 2018 ?

Pour répondre à cette question, nous constatons que nous devons additionner les quantités d'énergie produite depuis 2018. C'est-à-dire, nous devons calculer

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par exemple, d'après ce qui précède, la quantité d'énergie produite durant les 25 premières années correspond à

$$S_{24} = u_0 \times \frac{1-q^{24+1}}{1-q} = 1900 \times \frac{1-0,97^{25}}{1-0,97} \approx 33\,758\, kWh.$$

Puisque $0 < q < 1$ nous savons également que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = u_0 \times \frac{1}{1-q} = 1900 \times \frac{1}{1-0,97} \approx 63\,333\, kWh.$$

En conclusion, ce particulier ne pourra jamais produire plus de $70\, MWh$ à compter du 1er janvier 2018.

En exercice, il sera important (à l'aide la calculatrice) **de conjecturer la valeur de la limite (lorsqu'elle existe) d'une suite**.

5.3 Théorèmes de comparaison

Certaines limites de suites ne peuvent être obtenues avec les outils dont nous disposons actuellement.

Exemple 5.3.1. Déterminer la limite de $u_n = n^2 - 5 \times (-1)^n$. Nous ne savons pas comment faire puisque $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe pas.

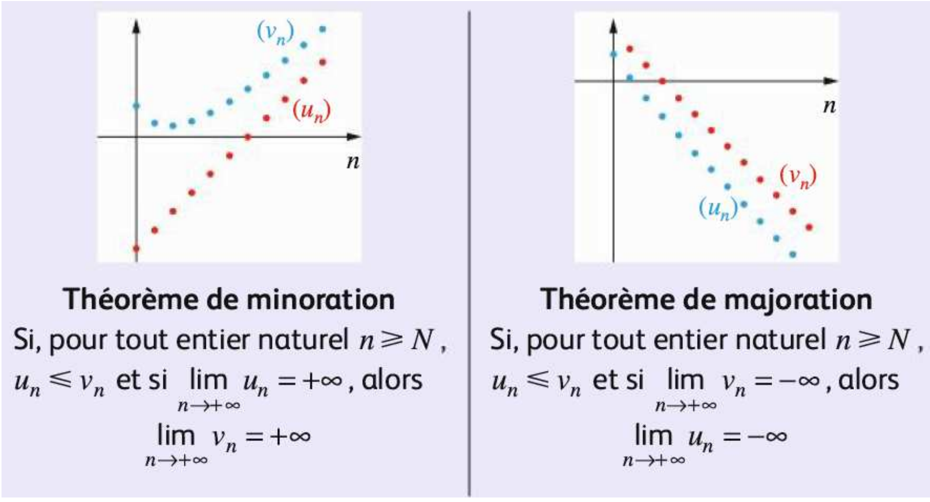
Il n'est pas toujours simple, même pour la calculatrice, de déterminer le comportement d'une suite lorsque $n \to +\infty$. Cependant, il est parfois possible de comparer une suite compliquée à une autre plus simple. Dans ce cas, le comportement de l'une à l'infini peut avoir un impact sur le comportement de l'autre.

Théorème 23 (Théorème de comparaison)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Nous supposons qu'à partir d'un certain rang N, nous avons*

$$u_n \leq v_n \quad \textit{pour tout} \quad n \geq N.$$

1. *(Minoration) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
2. *(Majoration) Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Graphiquement, cela donne



Démonstration. Démontrons la première assertion à l'aide de la définition 5.0.1. Soit $A > 0$ un nombre quelconque, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, nous avons $A < u_n$. Ainsi, en choisissant $N_1 = \max(N, n_0)$, nous avons pour tout $n \geq N_1$,

$$A < u_n \leq v_n.$$

Autrement dit, pour tout $A > 0$, il existe un rang N_1 à partir duquel $v_n \in]A; +\infty[$: il s'agit précisément de la définition de

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Nous laissons le soin au lecteur de démontrer le deuxième point à l'aide de ce qui précède (modulo quelques modifications). □

Voyons sur un exemple.

Exemple 5.3.2.
1. Si $u_n = n + 2\sin(n)$ nous avons
$$n - 2 \leq u_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$
D'où, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Si $v_n = -n^2 - n + (-1)^n$ nous avons
$$v_n \leq -n^2 - n + 1 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$
D'où, $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercices à traiter : 13 et 14 page 23 (méthode 6 page 23) ; 63,65 page 31 à la maison.

Comme nous allons le voir, il est possible de combiner majoration et minoration afin de démontrer qu'une suite converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

Théorème 24 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites numériques. Nous supposons qu'à partir d'un certain rang N, nous avons*

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \textit{pour tout} \quad n \geq N.$$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.
Graphiquement, cela donne

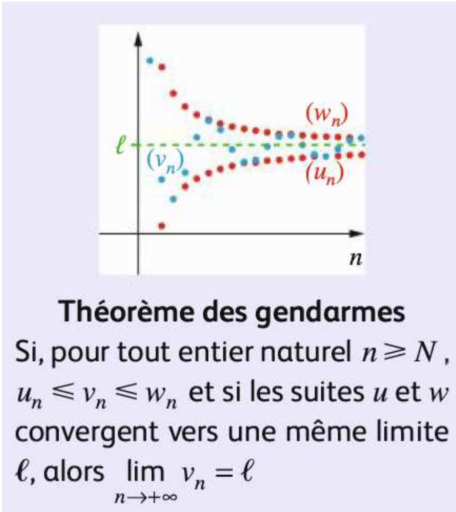
Voyons sur un exemple.

Exemple 5.3.3. Déterminons la limite de la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Puisque $(-1)^n$ ne prend que deux valeurs : 1 et -1 nous avons

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$



Exercices à traiter : 15 et 16 page 23 (méthode 7 page 23) ; 66 page 31, 70 page 31 à faire à la maison.

Parfois, notamment lorsque les suites sont définies par récurrence, il n'est pas évident d'encadrer une suite u_n afin de déterminer sa limite. Il convient alors de trouver une méthode alternative.

5.4 Convergence et monotonie

Voyons une autre manière de déterminer des limites, cette fois-ci en supposant que la suite (u_n) étudiée vérifie une **propriété de monotonie** (croissance ou décroissante) à laquelle il faudra ajouter une **propriété de majoration ou de minoration** (cf. définition 1.4.1).

Voici le résultat essentiel de cette section ; pour démontrer celui-ci nous utiliserons de nouveau la notion de borne supérieure et inférieure. L'importance de ce résultat réside dans le fait suivant : **il permet d'obtenir l'existence d'une limite l d'une suite**, cependant la valeur de l n'est pas forcément connue.

Théorème 25 (Convergence suites monotones)**.** *Soit (u_n) une suite de nombre réels.*

1. *Si (u_n) est décroissante minorée alors elle converge vers une limite finie.*
2. *Si (u_n) est croissante majorée alors elle converge vers une limite finie.*
3. *Si (u_n) est croissante non-majorée alors elle diverge vers $+\infty$.*
4. *Si (u_n) est décroissante non-minorée alors elle diverge vers $-\infty$.*

Démonstration. La démonstration est omise car celle-ci utilise la notion de borne supérieure (le plus petit des majorants) ou de borne inférieure (le plus grand des minorants) qui sont hors programme. □

Illustrons ce nouveau théorème sur différents exemples.

Exemple 5.4.1. 1. Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

(a) Tout d'abord, déterminons les cinq premiers termes de la suite pour voir ce qu'il se produit.

(b) Démontrons que la suite (u_n) est bornée.

(c) Démontrons que la suite (u_n) est croissante.

(d) Que pouvons-nous en déduire quant à la limite de la suite (u_n).

2. (Cet exemple étant plus élaboré, il pourra être omis par le lecteur) Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Nous rappelons au passage que $k! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ pour tout $k \geq 1$ et $0! = 1$. La suite est visiblement croissante puisque, pour tout $n \geq 1$ nous avons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Il nous reste à montrer que la suite est majorée. Pour cela, nous laissons au lecteur le soin de démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Ceci permet de majorer u_n. En effet,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3.$$

Dans la dernière majoration, nous avons utilisé le fait suivant[5]

$$\sum_{k \geq 0} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2.$$

En conclusion, nous avons une suite croissante et majorée : elle converge donc vers un nombre que nous noterons e[6]. Observons en passant que ce nombre vérifie l'inégalité suivante

$$u_2 = 2,5 \leq e \leq 3.$$

Exercices à traiter : 19 page 25 (méthode 9 page 25), 82 page 32 ; 83,84 page 32 à faire à la maison.
Voyons ce qui se produit lorsque nous avons à disposition une suite monotone qui n'est ni majorée, ni minorée.

Théorème 26 (Divergence de suites monotones)**.** *Soit (u_n) une suite de nombre réels.*

1. *Si (u_n) est croissante non-majorée alors elle diverge vers $+\infty$.*
2. *Si (u_n) est décroissante non-minorée alors elle diverge vers $-\infty$.*

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 5.4.2. Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

1. Démontrons que la suite (u_n) est minorée par 3.
2. Démontrons que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrons que si la suite (u_n) converge vers un réel l alors, nécessairement $l = 3$ ou $l = -1$.
4. La suite (u_n) peut-elle être majorée ? Justifier.
5. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercices à traiter : 21 page 26 (méthode 10 page 25) ; 22 (Q1 et Q2) page 26 à la maison.

Exercices bilan : 108 et 109 page 34.

5.5 Suites adjacentes (pour aller plus loin)

Le principe de monotonie peut-être fort utile pour construire des algorithmes donnant un moyen d'approcher une valeur limite par excès et par défaut, tout en contrôlant l'erreur commise. Pour cela, il est nécessaire de définir la notion de suites adjacentes.

5. Ceci se démontre en utilisant le résultat lié aux sommes partielles d'une série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.
6. Il s'agit d'un nombre d'Euler, lié à la fonction exponentielle, dont nous reparlerons ultérieurement.

Théorème 27 (Suites adjacentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \tag{5.5.1}$$

alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers deux nombres α et β vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \alpha \leq \beta \leq v_n.$$

Si de plus

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \tag{5.5.2}$$

alors $\alpha = \beta$.

Remarque.

1. Si (u_n) et (v_n) vérifient (5.5.1) et (5.5.2), nous dirons qu'elles sont **adjacentes**. Ces suites convergent vers une limite $l \in \mathbb{R}$, la suite (v_n) approche l par excès et (u_n) par défaut.
2. Le théorème 27 peut se reformuler d'un point de vue plus géométrique. A cet effet, posons $I_n = [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et observons que l'hypothèse (5.5.1) implique que ces **segments sont emboités** (faire un dessin) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} \subset I_n \subset \ldots \subset I_0.$$
Lorsque la propriété (5.5.2) est aussi vérifiée (signifiant que la taille de segments devient infiniment petit lorsque $n \to +\infty$), le théorème 27 nous assure que **l'intersection de tous ces intervalles est réduit à un unique point**. Avec cette formulation, le théorème prend l'appellation « théorème des segments emboités ».

Voyons un exemple d'application du théorème 27.

Exemple 5.5.1 (e est irrationnel)**.** Considérons les suites $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ définies chacune pour tout $n \geq 1$; nous indiquons que $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ et $0! = 1$. Dans un premier temps, nous allons montrer que ces suites sont adjacentes et qu'elles convergent vers le nombre d'Euler e[7] Dans un second temps, nous montrerons que ce nombre est irrationnel : il n'est pas possible de trouver $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_*$ tel que $e = \frac{p}{q}$.

1. Montrons que ces suites sont adjacentes.
   (a) Nous avons montré dans l'exemple 5.4.1 que la suite (u_n) est strictement croissante. Ceci réside dans le fait que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
   (b) Démontrons que la suite (v_n) est strictement décroissante. En effet, pour tout $n \geq 1$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right] \\ &= -\frac{1}{(n+1)!(n+1)n} < 0. \end{aligned}$$
   (c) Il est simple de montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ pour ensuite conclure (grâce au théorème 27) que ces deux suites convergent vers e
$$\text{i.e.} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = e.$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n < u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1} < v_n \tag{5.5.3}$$
2. Montrons que $e \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde, supposons que cela soit le cas et qu'il existe deux entiers relatifs (non nuls) p et q premiers entre eux (i.e. la fraction est irréductible) tels que
$$e = \frac{p}{q}.$$
L'inégalité (5.5.3) nous assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons
$$u_n < \frac{p}{q} < u_n + \frac{1}{nn!}.$$

7. Bien sûr, ceci fait écho à l'exemple 5.4.1.

En particulier, pour $n = q$, nous avons $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \times q!}$. Multiplions cette nouvelle inégalité par $q \times q!$, ceci mène à

$$q \times q! \times u_q < p < q \times q! \times u_q + 1.$$

A présent, notons $N = q \times q! \times u_q$ et observons (via la définition de u_q) que $N \in \mathbb{N}$. Nous avons donc montré que

$$N < p < N + 1$$

ce qui est absurde puisque N et $N + 1$ sont des entiers consécutifs, il n'est pas possible d'insérer un entier p entre les deux. Ce qui achève la démonstration.

Remarque. Remarquons en passant que l'inégalité (5.5.3) (obtenue grâce au théorème 27) permet d'approcher assez précisément e puisque nous avons une majoration de l'erreur commise : pour tout $n \geq 0$,

$$0 < e - u_n < \frac{1}{n \times n!}$$

Par exemple, si $n = 10$ l'erreur commise est inférieure à 10^{-8} et $u_{10} \approx 2,71828182\ldots$ est une approximation par défaut de e dont les sept premières décimales coïncident avec le véritable nombre.

5.5.1 Principe de Dichotomie

Nous allons voir qu'il est possible de combiner le principe de dichotomie avec des suites adjacentes pour obtenir des algorithmes simples permettant d'approcher une valeur tout en contrôlant l'erreur commise. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 5.5.2. Dans le chapitre précédent, nous avons rencontré un nombre irrationnel connu depuis l'antiquité : $\sqrt{2}$. Etant irrationnel, ce nombre s'exprime de manière plus compliquée qu'un nombre entier, décimal ou rationnel. Il est intéressant de se demander comment créer un algorithme permettant d'approcher cette valeur. En particulier, nous imposons que notre algorithme soit uniquement composé de nombre rationnels. Voici une méthode répondant à cette question, celle-ci repose sur le fait que $\sqrt{2}$ est solution de $x^2 - 2 = 0$.

Choisissons deux nombres a_0 et b_0 tels que

$$a_0^2 < 2 < b_0^2.$$

Par exemple,

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_0 = 2.$$

Déterminons ensuite le milieu[8] m_0 du segment $[a_0, b_0]$: $m_0 = \frac{b_0 + a_0}{2}$. Ce nouveau nombre vérifie alors l'une des propriétés suivantes :

$$\text{soit} \quad m_0^2 < 2 \quad ; \quad \text{soit} \quad m_0^2 > 2.$$

Dans le premier cas, nous posons $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$; dans le second cas, nous posons $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$. De plus, par construction, nous avons

$$a_1^2 < 2 < b_1^2.$$

Nous reprenons ensuite notre procédé en déterminant $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ et déterminons a_2 et b_2 suivant que m_1^2 soit plus grand ou plus petit que 2. Nous construisons ainsi deux suites de nombres (a_n) et (b_n), la première étant croissante et la seconde croissante vérifiant, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n^2 < 2 < b_n^2.$$

Autrement dit, la suite (a_n) approche $\sqrt{2}$ par défaut alors que la suite (b_n) l'approche par excès. En effet, par construction, l'écart entre ces deux suites est donné par

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

En conséquence, $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{2}$.

Remarque. 1. Le lecteur observera que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

2. Si nous souhaitons une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près, il faudrait déterminer a_{10} et b_{10}. Lesquels valent

$$a_{10} = 1,4140625 \quad \text{et} \quad b_{10} = 1,415039062.$$

Nous verrons dans un autre chapitre une méthode plus efficace (plus rapide) pour approcher $\sqrt{2}$.

8. Le lecteur vérifiera que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $m_0 = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$.