Chapitre 6

Limites de fonctions

Comme nous l'avons vu dans un chapitre précédent, nous avons appris à déterminer les limites de suites lorsque $n \to +\infty$. Il est maintenant naturel de s'interroger de quelle manière ce qui fonctionne pour des suites pourrait être valable pour des fonctions.

Exemple 6.0.1. Si $u_n = n^2 - 2n + 3$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Considérons alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$ avec $x \in \mathbb{R}$. Que dire alors de

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \quad ?$$

Il se trouve que la définition 4.0.1 va pouvoir s'étendre sans peine au cas des fonctions.

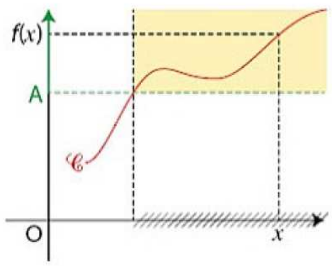
6.1 Limites en $\pm\infty$

Débutons par le cas d'un limite infinie lorsque x tend vers l'infini.

Définition 6.1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

1. *Si pour tout $A > 0$ (aussi grand que souhaité), l'intervalle ouvert $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment grand, nous noterons ceci*

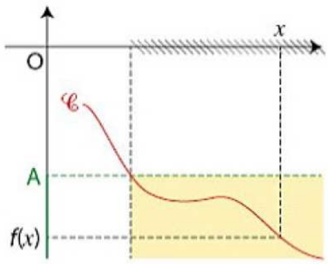
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$



2. *Si pour tout $A < 0$ (aussi petit[1] que souhaité), l'intervalle ouvert $]-\infty, A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment grand, nous noterons ceci*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

1. Précisons que ce nombre sera placé très loin parmi les nombres négatifs, par exemple $A = -10^{12}$.



Remarque. Contrairement au cas des suites (pour lesquelles $n \to +\infty$ uniquement), il est possible de faire tendre x vers d'autres valeurs. Nous pourrions, par exemple, nous demander ce qui se produit lorsque $x \to -\infty$. Les définitions précédentes sont alors reprises mutatis mutandis[2] afin de définir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Nous laissons le soin au lecteur de compléter ceci. Les véritables démonstrations (pour établir que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par exemple) s'effectuent comme pour les suites, nous ne nous attarderons pas ce sur point.

Pour trouver des exemples, il suffit de reprendre ce qui a été vu avec les suites numériques.

Exemple 6.1.1 (Fonctions de références)**.**
1. Soit $n \geqslant 1$ un entier alors $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.
2. En revanche, lorsque $x \to -\infty$, le résultat dépendra de la parité de n :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \quad \text{est pair ;} \\ -\infty & \text{si} \quad n \quad \text{est impair.} \end{cases}$$

3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; cela n'a pas de sens de chercher à déterminer $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ puisque la fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. La limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ sera donnée dans quelques instants.

Avant de poursuivre l'exposé, faisons quelques remarques.

Remarque.
1. Dire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ n'a aucun impact sur la monotonie de f. En particulier, cela n'entraine pas que f est croissante. Pour s'en convaincre, il suffit de dessiner une fonction dont le graphe est en dent de scies et dont les valeurs de deviennent de plus en plus grandes.
2. Comme pour les suites, toutes les fonctions n'admettent pas forcément une limite lorsque x tend vers l'infini. C'est notamment le cas des fonctions qui oscillent comme $x \mapsto \sin(x)$ ou $x \mapsto \cos(x)$: i.e.

$$\lim_{x\to+\infty} \cos(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} \sin(x) \quad \text{n'existent pas.}$$

Regardons maitenant ce qui peut se produire lorsque la limite d'une fonction est finie lors x tend vers l'infini.

Définition 6.1.2. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[B; +\infty[$ avec $B > 0$ suffisamment grand. Nous dirons que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to +\infty$ si tout intervalle ouvert I, centré en l, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. Nous noterons ceci par*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Nous adoptons une définition analogue pour $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$. Dans tous les cas, la limite l est unique.

Remarque. En pratique, pour déterminer la limite d'une fonction en l'infini, il suffit d'utiliser sa calculatrice pour observer les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand :

- si $f(x)$ semble se rapprocher d'une valeur l nous sommes dans le premier cas ;
- si au contraire les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en grandes cela signifie que $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ (en fonction du signe).

Voyons ce que donne cette définition graphiquement : peu importe la taille de la boite centrée (l'intervalle I) en l (sur l'axe des ordonnées), il est possible de trouver un nombre suffisamment grand (B sur l'axe des ordonnées) de sorte que toutes les valeurs de $f(x)$ soient coincées dans la boite centrée en l à partir de B.

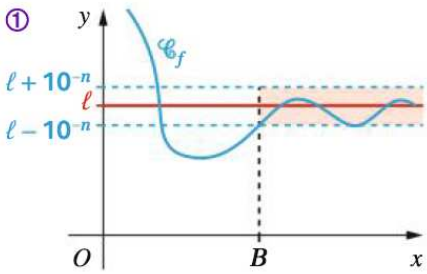


FIGURE 6.1 – $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

Voyons ce qui se produit pour les fonctions de références.

Exemple 6.1.2.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
2. De même, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
3. Enfin, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Lorsqu'une fonction admet une limite finie en $\pm\infty$ cela a une conséquence sur sa représentation graphique.

Définition 6.1.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et notons C_f sa courbe représentative. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, nous dirons que la courbe C_f admet pour asymptote horizontale (en $+\infty$) la droite d'équation $y = l$.*

Remarque. Nous définissons de manière analogue une asymptote horizontale en $-\infty$.

Voyons cela sur un exemple.

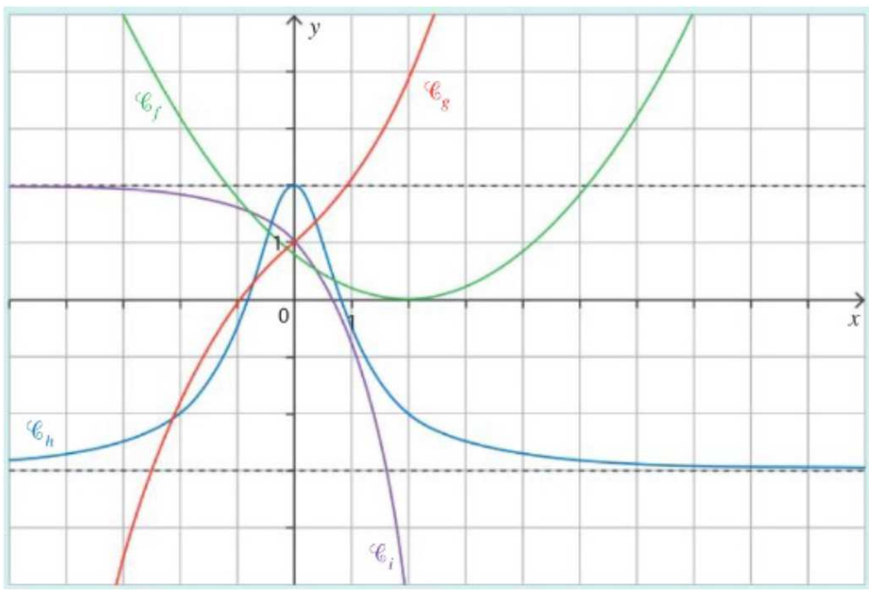
Exemple 6.1.3. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Nous observons alors que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$$

Ainsi, la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $\pm\infty$ pour la courbe C_f.

Voyons ce que cela donne graphiquement.

Exemple 6.1.4. Considérons les courbes suivantes :



1. Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions représentées ci-dessous.
2. En déduire l'équation des asymptotes horizontales de certaines courbes représentatives.
3. Dresser le tableau de variation de ces fonctions g, h et i.

Exercices à traiter : 1-2 (sauf question 2) page 53 puis 33 à 35 page 64 (cf. méthode 1 page 53).

2. En remplaçant seulement « lorsque x est suffisamment grand » par « lorsque x est petit (ici, dans le sens proche de $-\infty$) ».

6.2 Limite d'une fonction en un point

Maintenant que nous avons vu ce qui peut se produire en ± pour une fonction, nous allons regarder ce qui peut se passer lorsque $x \to a$ pour $a \in \mathbb{R}$ une valeur donnée[3]. Autrement dit, que dire de

$$\lim_{x \to a} f(x) = \quad ?$$

A noter que ceci est propre aux fonctions et ne pouvait être traité dans le cadre des suites.

Définition 6.2.1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.*

1. *Nous dirons que f admet $+\infty$ comme limite en a lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi grande que nous le souhaitons dès que x est suffisamment proche de a[4]. Nous noterons ceci par*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

2. *Nous pouvons définir de manière similaire $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.*
3. *Si tout intervalle ouvert I, centré en un nombre l, contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a, nous dirons que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Remarque. Dans certain cas de figures, la limite d'une fonction change suivant que x s'approche de a par valeurs décroissantes :

$$i.e. \quad x \to a \quad \text{et} \quad x > a.$$

Il s'agit de la limite à « droite », au point a. Nous noterons ceci $\lim_{x \to a^+}$. De la même manière, nous pouvons considérer la limite à « gauche » (notée $\lim_{x \to a^-}$) lorsque

$$x \to a \quad \text{et} \quad x < a.$$

Par exemple, ceci s'observe sur la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. En effet,

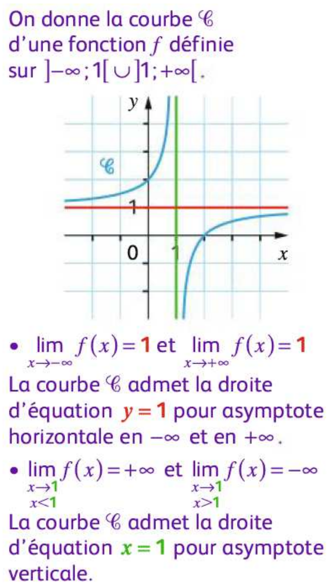
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$$

comme cela peut s'observer simplement sur la courbe représentative associée.

Concernant les conséquences graphiques : dans le cas d'une limite infinie lorsque $x \to a$, cette fois-ci, l'asymptote est verticale plutôt qu'horizontale. Donnons une définition de ceci.

Définition 6.2.2. *Lorsque f admet pour limite $\pm\infty$ lorsque en a (à gauche et à droite), nous dirons que C_f (la courbe représentative) admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = a$.*

Graphiquement, ceci est visible (en vert) sur le graphique ci-dessous



3. Ceci est notamment intéressant lorsque a correspond à une valeur interdite d'une fonction donnée
4. i.e. pour tout $A > 0$, $f(x) \in [A, +\infty[$ dès que x est suffisamment proche de a

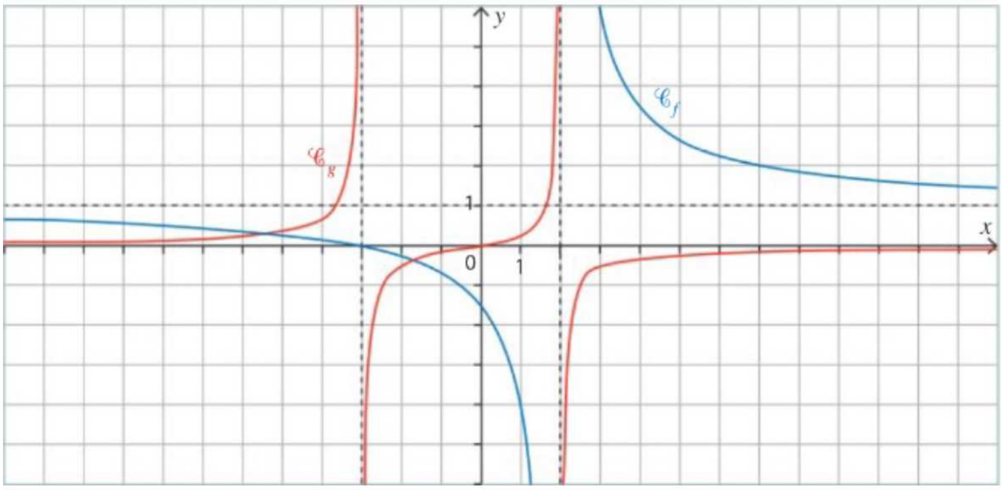
Voyons cela sur plusieurs exemples.

Exemple 6.2.1. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{2}{x-1}$. Dans ce cas, nous avons

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

En conséquence, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale.

2. Considérons les courbes suivantes :



(a) Conjecturer graphiquement les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions représentées ci-dessous.

(b) Certaines courbes représentatives semblent admettre des asymptotes horizontales ou verticales ? Donner leurs équations.

(c) Dresser le tableau de variation de ces fonctions f, g sur $\mathbb{R}$.

Exercices à traiter : 3 et 5 page 55 puis 36 à 41 (sauf 37) page 64 (cf. méthodes 2-3 page 61).

6.3 Opérations sur les limites

Il convient de conserver en tête les règles de calculs sur les limites qui ont été d'abord été présentées pour les suites (addition, multiplication, soustraction, quotient, comparaison,...). Nous allons résumé ceci dans un tableau, lequel deviendra évident lorsque nous traiterons des exemples. car tout se passe pour le mieux. Toutefois, il faut se souvenir des formes indéterminées qui ne peuvent être levées sans travail supplémentaire, elles sont de la forme

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \infty - \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Nous reviendrons là dessus à la fin de la section. Dans ce qui va suivre α **désignera un nombre réel ou** $\pm\infty$. Débutons par le cas de la somme.

Proposition 36 (Limite d'une somme)**.** *Soient f et g deux fonctions et $l, l' \in \mathbb{R}$ deux nombres réels.*

$\lim_{x\to\alpha} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to\alpha} g(x) =$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x) =$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*

Remarque. Il faut retenir qu'une limite de la forme $+\infty - \infty$ est dite **indéterminée** : tout peut se produire et il est nécessaire de fournir un travail supplémentaire afin de lever l'indétermination.

Voyons cela sur deux exemples.

Exemple 6.3.1. 1. Déterminons $\lim_{x\to+\infty}(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, nous en déduisons que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

Pour les mêmes raisons, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$. Par suite, nous avons donc

$$\lim_{x\to+\infty}(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to+\infty}3+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=3.$$

Ce résultat était déjà pressenti grâce à la calculatrice.

2. $\lim_{x+\infty} x^2+2x-3=+\infty$.
3. $\lim_{x+\infty} -3x^2+2x-3$ est une forme indéterminée (de la forme $-\infty+\infty$), un travail supplémentaire est nécessaire.

Passons à présent au cas de la limite d'un produit.

Proposition 37 (Limite d'un produit)**.** *Soient f et g deux fonctions et $l, l'\in\mathbb{R}$ deux nombres réels.*

$\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	l	$l\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=$	$l\times l'$	$\mathrm{sgn}(l)\times\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*

Remarque. Il faut retenir qu'une limite de la forme $0\times\pm\infty$ est dite **indéterminée** : tout peut se produire et il est nécessaire de fournir un travail supplémentaire afin de lever l'indétermination.

Voyons ceci sur un exemple.

Exemple 6.3.2. 1. $\lim_{x\to-\infty}(x-5)(x^2+3)=-\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} x-5=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2+3=+\infty$, il suffit ensuite d'appliquer une règle de signes.

2. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}-5)(-2x^3+6)=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-5=-5$ et $\lim_{x\to+\infty} -2x^3+6=-\infty$, il suffit ensuite d'appliquer une règle de signes.
3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\times(x+1)$ est une forme indéterminée (de la forme $0\times+\infty$), un travail supplémentaire est nécessaire.

Passons à présent au cas des quotients.

Proposition 38 (Limite d'un quotient)**.** *Soient f et g deux fonctions*[5] *et $l, l'\in\mathbb{R}$ deux nombres réels.*

$\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	l	l	$l\neq 0$	$l\neq 0$	0
$\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0
$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=$	$\frac{l}{l'}$	0	$\mathrm{sgn}(l)\times+\infty$	$\mathrm{sgn}(l)\times-\infty$	*F.I.*

et

$\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	$l'\neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	*F.I.*

Remarque. Il faut retenir qu'une limite de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ est dite **indéterminée** : tout peut se produire et il est nécessaire de fournir un travail supplémentaire afin de lever l'indétermination.

Voyons sur des exemples.

Exemple 6.3.3. 1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2-1}=0$ car $\lim_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$.

2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^2+6x-1}{x^2+1}$ est une forme indéterminée (de la forme $\frac{\infty}{\infty}$).
3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}}$ est une forme indéterminée (de la forme $\frac{0}{0}$).

Exercices à traiter : 7 à 11 page 57 puis 42 à 46 page 65 ; Méthode 4 page 57.

5. Implicitement, il est supposé que $g(x)$ n'est pas nul au voisinage de la limite considérée pour que le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ ait du sens.

6.3.1 Lever une indétermination

Comme nous l'avons observé dans ci-dessus, de nombreuses limites aboutissaient à des formes indéterminées. Il convient alors de trouver un moyen de résoudre ces difficultés.

Voyons comment traiter le cas des fractions rationnelles (i.e. une fonction obtenue comme le quotient de deux polynômes)

Exemple 6.3.4. 1. Déterminons la limite en $+\infty$ de $f(x) = 2x^2 - 8x$. Il s'agit d'une forme indéterminée (du type $+\infty - \infty$). Pour lever cette indétermination, il suffit de **factoriser par le terme dominant** : ici, il s'agit de $2x^2$. Nous obtenons alors

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^2 - 8x = \lim_{x\to+\infty} 2x^2(1 - \frac{4}{x}) = +\infty$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1$.

2. Déterminons la limite de $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ lorsque $x \to -\infty$. Il n'est pas difficile d'étudier séparément numérateur et dénominateur :

$$\lim_{x\to-\infty} 2x - 1 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty.$$

Nous obtenons ainsi une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever cette indétermination, il faut **factoriser au numérateur et au dénominateur par le terme dominant** afin de comparer ces deux infinis (voir s'ils sont de « même taille » ou si l'un des deux est « plus grand que l'autre »). Il est possible de montrer que

$$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudions à nouveau les limites du numérateur et du dénominateur, nous trouvons

$$\lim_{x\to-\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1.$$

En conséquence, les infinis sont de « même taille » et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{1}$ comme nous aurions pu le conjecturer à l'aide d'une calculatrice.

Remarque. Le procédé décrit plus haut, pour lever une indétermination, est à retenir (et ceci même si la fonction n'est pas composée de polynômes) : factoriser par le terme dominant au voisinage de la limite étudiée.

Dans le cas d'une fraction dont le dénominateur et le numérateur est composé uniquement de puissances de x, les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent en étudiant la limite du quotient des termes de plus haut degré. Par exemple[6],

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 2x\sqrt{x} + 7}{-8x^2 + 3\sqrt{x} + 7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{-8x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Voyons un dernier exemple, cette fois-ci la limite se trouve en 0^+.

Exemple 6.3.5. Déterminons la limite $f(x) = 3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ lorsque $x \to 0^+$. Naïvement, nous pouvons essayer de déterminer la limite de chaque terme pour ensuite les additionner. Or,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{2}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Nous faisons alors face à une forme indéterminée $\infty - \infty$. Pour la lever, il suffit de mettre la fonction sous un unique dénominateur :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x} = (3x^2 + 2x - 1) \times \frac{1}{x^2}.$$

Dans ce cas, il est simple d'observer que $\lim_{x\to0^+}(3x^2 + 2x - 1) = -1$ tandis que $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 \times (+\infty) = -\infty.$$

Exercices à traiter : 16 à 19 page 60 puis 57 à 61 page 66 (cf. méthode 7 page 60).

6. nous rappelons que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

6.4 Limites et compositions de fonctions

Voyons comment traiter les limites d'une fonction composée. Pour cela, prenons un exemple.

Exemple 6.4.1. Que dire de la limite suivante

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2-\frac{1}{x}} = \quad ?$$

De manière naturelle, nous avons envie de dire la chose suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x} = 2$$

et comme[7] $\lim_{t\to 2} \sqrt{t} = \sqrt{2}$, il semble normal d'annoncer que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2-\frac{1}{x}} = \sqrt{2}.$$

Voyons comment rendre ceci rigoureux. Dans ce qui suit α, β et γ désignent des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$: ils peuvent ainsi désigner un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 39 (Limites et composition)**.** *Soient f et g deux fonctions définies de sorte que la composition $f\circ g$ ait du sens. Si $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta$ et $\lim_{x\to\beta} f(x) = \gamma$ alors*

$$\lim_{x\to\alpha} f\circ g(x) = \gamma.$$

Voyons comment utiliser ce théorème afin de justifier l'intuition que nous avons eut dans l'exemple du début de section.

Exemple 6.4.2. La fonction $\sqrt{2-\frac{1}{x}}$ est définie sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ et correspond à la composition des fonctions

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{2-\frac{1}{x}}.$$

Autrement dit $f\circ g(x) = \sqrt{2-\frac{1}{x}}$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$ et que $\lim_{X\to 2} f(X) = \sqrt{2}$ nous avons bien

$$\lim_{x\to+\infty} f\circ g(x) = \sqrt{2}$$

comme nous l'avions annoncé.

Exercices à traiter : 14-15 page 59 puis 52 à 56 page 66 (Méthode 6 page 59).

Ceci est l'occasion de voir une nouvelle manière permettant de lever une indétermination : l'utilisation du conjugué.

Exemple 6.4.3 (Limites et conjugués)**.** Considérons la fonction suivante $f(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème 39 nous permet de déterminer la limite en $+\infty$ de chacun des termes de cette soustraction. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+3} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty.$$

Malheureusement, ceci nous mène à une forme indéterminée qu'il va falloir lever. Pour cela, il suffit d'utiliser le conjugué de $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}$, il s'agit de

$$\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}.$$

Grâce à elle, nous obtenons alors

$$f(x) = (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}) \times \frac{(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}}$$

et nous pouvons développer le numérateur à l'aide d'une identité remarquable. Ceci mène à

$$f(x) = \frac{x^2+3-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+1}}.$$

Or, d'après ce qui précède, nous savons que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+1} = +\infty$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

7. Ceci utilise implicitement la notion de continuité qui sera étudiée dans le chapitre suivant.

Exercices à traiter : 20 à 23 page 61 puis 62 page 66 (méthode 8 page 61).

6.4.1 Limites et suites définies par une fonction

Nous avons déjà rencontré des suites définies à l'aide d'une fonction : $u_n = f(n)$. Il est alors naturel de se demander si la connaissance de la limite de f en $+\infty$, nous permet d'en déduire celle de u_n. La réponse à cela réside dans l'unicité d'une limite.

Proposition 40. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$$

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 6.4.4. Soit u_n la suite définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n+2}}$. Cette suite implique la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x+2}}$. Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = +\infty.$$

D'où, en posant $X = \frac{x^2+1}{x+2}$, nous en déduisons que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty.$$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercices à traiter : 55 et 56 page 66.

6.5 Limites et comparaisons

Considérons la fonction $f(x) = x + \cos(x)$. En réfléchissant, nous constatons, que nous ne savons pas déterminer, à l'aide des outils exposés dans les sections précédentes, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x + \cos(x) = ? \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x + \cos(x) = ?$$

La raison à cela est que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ (tout comme la fonction $x \mapsto \sin(x)$ n'admettent pas de limites en $\pm\infty$. Toutefois, grâce à la calculatrice, il semblerait que les limites, en $\pm$, de la fonction f existent bel et bien. Pour régler ce problème technique, il va être nécessaire, comme pour les suites, de présenter des résultats de comparaisons : cela revient à comprendre comment les limites ses comportent vis-à-vis des inégalités.

Théorème 41 (Théorème de comparaison)**.** *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$. Nous supposons que, pour tout $x > A$, nous avons*

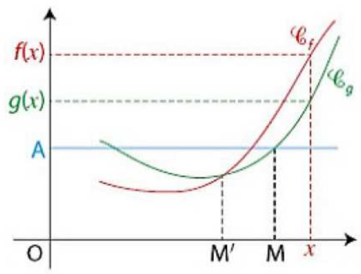
$$f(x) \leqslant g(x).$$

Dans ce cas, nous en déduisons[8] que

1. *si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.*
2. *si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.*

Graphiquement :

8. Comme pour les suites avec le théorème **??**.



Remarque. Bien entendu, ce qui précède reste vrai, après quelques modifications en $-\infty$. Pour, cela, il suffit de reprendre l'énoncé du théorème en supposant que les fonctions sont définies sur $]-\infty; A[$ avec $A \in \mathbb{R}$ et que pour tout $x < A$, nous avons

$$f(x) \leqslant g(x).$$

La démonstration de ce résultat s'obtient en adaptant la preuve du théorème de comparaison (pour les suites) 20.

Reprenons l'exemple de début de section.

Exemple 6.5.1. Soit $f(x) = x + \cos(x)$. Puisque $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous en déduisons que

$$x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x + 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De la même manière, puisque $\lim_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$ nous en déduisons que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exercices à traiter : 12-13 page 59 puis 47 et 48 page 65 (cf. méthode 5 page 59).

Que dire à présent de l'exemple suivant ?

Exemple 6.5.2. Soit $f(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Comment déterminer les limites suivantes ?

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = ?$$

Le théorème 41 est pratique pour montrer qu'une fonction « compliquée » tend vers $\pm\infty$ en la comparant avec une fonction « simple » dont la limite en $\pm\infty$ est connue. En revanche, ce théorème ne dit rien vis-à-vis d'une limite finie.

Comme nous venons de le constater avec l'exemple précédent, nous avons besoin d'un nouveau résultat. Celui-ci correspond à une adapation, au cadre des fonctions, du théorème 21 qui avait été obtenu pour les suites.

Théorème 42 (Théorèmes des gendarmes)**.** *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$. Nous supposons que pour tout $x > A$, nous avons*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x).$$

Dans ce cas, si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Graphiquement :

Remarque. Bien entendu, une fois de plus, ce théorème est valable (en adaptant l'énoncé) en $-\infty$.

Fort de ce théorème, nous pouvons maintenant déterminer la limite présentée en début de section.

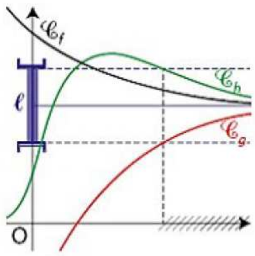
Exemple 6.5.3. Soit $f(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ nous avons

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

En outre, $\lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$. D'où, d'après le théorème des gendarmes 42, nous avons

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$$

Exercices à traiter : 14 à 15 page 59 puis 50 page 65 ; (cf. méthode 5 page 59).



6.5.1 Croissances comparées

Le lecteur pourra observer que les méthodes décrites plus haut, de comparaison ou liées aux opérations élémentaires vis-à-vis des limites, ne permettent pas de lever les indéterminations suivantes :

$$\lim_{\to -\infty} e^x x^2 = ? \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^4} = ?$$

Il convient donc de savoir si x^2 tend plus vite vers $+\infty$ que e^x tend vers 0 ou de savoir si e^x tend plus rapidement vers $+\infty$ que $\frac{1}{x^4}$ tend vers 0. Le résultat lié à ceci porte le nom de croissances comparées.

Théorème 43 (Croissances comparées I)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Nous avons alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \textit{et} \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

Remarque. Dis avec des mots, cela signifie que l'exponentielle croit ou décroit plus rapidement[9] que n'importe quelle puissance de x. En d'autres termes, en $\pm\infty$, « la limite de l'exponentielle l'emporte sur celle des puissances de x ».

Démonstration. Pour établir ce théorème, nous devons d'abord montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geqslant 1 + x. \tag{6.5.1}$$

1. Ce résultat s'obtient sans peine en étudiant les variations de la fonction $\phi(x) = e^x - x$ sur $\mathbb{R}$; ce résultat peut également être obtenu en utilisant la convexité de la fonction e^x.

   Considérons à présent $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ alors, d'après l'inégalité (6.5.1), nous avons

   $$e^{\frac{x}{n+1}} \geqslant 1 + \frac{x}{n+1} \geqslant \frac{x}{n+1} > 0.$$

   Alors, puisque l'application $x \mapsto x^{n+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons que

   $$\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right) \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

   Autrement dit, en posant $C = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ qui est une constante indépendante de x, nous avons obtenu que

   $$e^x \geqslant C x^{n+1} \quad \text{pour tout} \quad x > 0.$$

   Ainsi, nous avons

   $$\frac{e^x}{x^n} \geqslant Cx$$

   et nous pouvons conclure grâce au théorème de comparaison puisque $\lim_{x \to +\infty} Cx = +\infty$.

2. Le deuxième point est plus simple et s'obtient à l'aide d'un changement de variable combiné à la première assertion que nous venons de démontrer. Posons $X = -x$, ainsi

   $$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim_{X \to +\infty} (-1)^n X^n e^{-X} = (-1)^n \lim_{X \to +\infty} \frac{X^n}{e^X} = 0$$

   puisque $\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$. D'où le résultat.

9. Bien que cela soit hors programme, ce résultat n'est pas étonnant car la véritable définition de l'exponentielle est $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$. Ainsi, intrinsèquement, l'exponentielle contient déjà toutes les puissances de x : il est donc naturel que cette fonction soit dominante en $\pm\infty$.

□

Traitons un exemple.

Exemple 6.5.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 4x}{e^x + 7}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. En factorisant numérateur et dénominateur par e^x, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercices à traiter : 51 page 66 et 94 page 69 ; Etudes de fonctions 99-100 page 69 et 105 page 70.