Chapitre 9

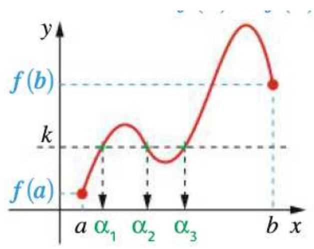
Continuité

9.1 Continuité

Dans cette section, nous allons étudier une propriété plus fine des fonctions : il s'agit de la notion de continuité. L'intérêt de cette étude permet de répondre à la question suivante : étant donnée la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$ avec $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{est-t-il possible de résoudre} \quad f(x) = 10\,?$$

Il est à noter que la résolution algébrique de cette équation est exclue car trop complexe. Il faut donc trouver d'autres approches. En expérimentant une tentative graphique, il semblerait que le nombre de solutions (à l'équation) dépende de l'allure de la courbe. Par exemple, sur la figure ci-dessous,



nous constatons qu'en fonction de la position de la droite $y = k$, nous pourrions ne pas avoir de solutions. En effet,

- si cette droite est trop basse, elle ne rencontrera pas la courbe C_f et l'équation n'aura pas de solutions.
- si cette droite est placée comme sur la figure, elle rencontre C_f en plusieurs points ; il y a donc 3 solutions.
- si elle était placée légèrement plus haut, il n'y aurait qu'un seul point d'intersection et donc qu'une unique solution.

Ces observations mènent à la première propriété que doit vérifier la fonction.

Définition 9.1.1 (Continuité)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.*

- *Nous dirons que f est continue au point a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

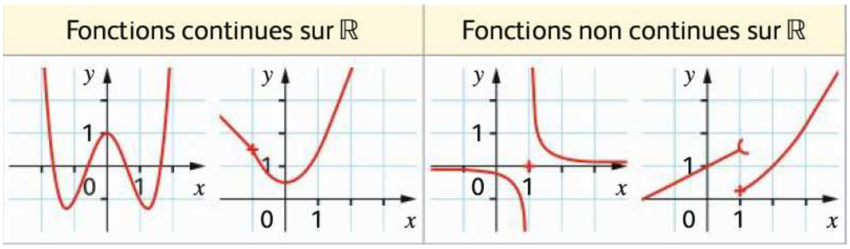
- *Nous dirons que f est continue sur I si f est continue en tout point $a \in I$.*

Remarque. Grossièrement, une fonction f définie sur un intervalle I est dite **continue** si sa courbe représentative C_f peut se tracer d'un seul trait, « sans avoir à lever le crayon ».

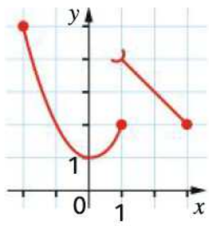
Voyons cela sur quelques exemples.

Exemple 9.1.1. Visuellement, il est assez simple d'identifier les fonctions continues.

1. Débutons par des fonctions définies sur $\mathbb{R}$



2. Voici un autre exemple de fonction qui est continue sur $[-2;1]$ mais pas sur $[-2;3]$ puisqu'il y a une discontinuité (un saut) en $x = 1$.



Le symbole apparaissant sur cette courbe nous assure que $f(1) = 2$ (et non $f(1) = 4$) ; puisque deux valeurs étaient envisageables, le symbole nous indique laquelle des deux choisir.

Il convient maintenant d'identifier les fonctions continues de celles qui ne le sont pas. Fort heureusement, les choses se passent plutôt bien et, en pratique, la quasi totalité des fonctions étudiées en exercice seront continues.

Proposition 54 (Continuité et fonctions usuelles). *1. Les fonctions polynomiales sont continues sur* $\mathbb{R}$.

2. *La fonction inverse est continue sur* $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$ *mais pas en* $x = 0$.
3. *La fonction exponentielle est continue sur* $\mathbb{R}$.
4. *Toute fonction dérivable sur un ensemble* I *est aussi continue sur* I.

Remarque. 1. La **continuité est préservée par les opérations d'addition, de soustraction ou de multiplication**. Autrement dit, si f et g sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ alors $f+g$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

2. **Pour le passage au quotient, il faut exclure les points en lesquels la fonction s'annule**. Par exemple, $x \mapsto x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme de degré 1) mais s'annule en $x = 1$. Par suite, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est continue sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ mais pas en $x = 1$.
3. Par convention, les flèches obliques présentent dans un tableau de variation indiquent que la fonction **continue** et **strictement monotone**.
4. La notion de **continuité est plus faible que la notion de dérivabilité** : il existe des fonctions continues qui ne sont pas dérivables. Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en ce point.

Voyons sur des exemples.

Exemple 9.1.2. 1. La fonction $f(x) = (2x+1)e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit d'un produit de deux fonction continues sur $\mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto 2x+1$ avec la fonction $x \mapsto e^x$).

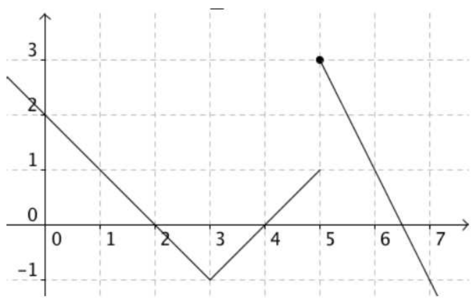
2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+3}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1;3\}$ est un quotient de deux polynômes (qui sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$), dont le dénominateur ne s'annule pas alors f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$, $]1;3[$ et $]3;+\infty[$.

Voyons un autre exemple.

Exemple 9.1.3. Soit f la fonction définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x < 3\,; \\ x-4 & \text{si} \quad 3 \leqslant x < 5\,; \\ -2x+13 & \text{si} \quad x \geqslant 5. \end{cases}$$

Dont la représentation graphique est donnée par



1. Tout d'abord, les fonctions $x \mapsto -x+2$; $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des polynômes, elles sont donc continues $\mathbb{R}$. En conséquence, f est continue sur les intervalles $]-\infty; 3[$, $]3; 5[$ et $]5; +\infty[$.
2. Il reste à regarder ce qui produit au bord de ces intervalles : c'est-à-dire en 3 et 5.
   (a) Débutons par ce qui se produit en 3 :

   $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} -x+2 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x-4 = -1.$$

   Ainsi, au point $a = 3$, la limite à gauche coïncide avec la limite à droite : autrement dit f est continue en 3 et $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = -1$.

   (b) En revanche, nous avons

   $$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} x-4 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} -2x+13 = 3.$$

   Ainsi, $\lim_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 5^+} f(x)$. La fonction n'est pas continue en 5.

En conclusion, f est continue sur $]-\infty; 5[$ et sur $]5; +\infty[$.

Exercices à traiter : 1 page 113 (cf. méthode 1 page 113) et 13,15 page 121 (cf. méthode 2 page 115) ; 2 page 113 à faire à la maison. Exercices d'entrainements : 20 à 24 page 122 et 25 à 28 page 122.

Pour résoudre notre problème initial, il est nécessaire de voir quel rôle joue la monotonie d'une fonction dans cette histoire. C'est l'objet de la section suivante.

9.2 Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection

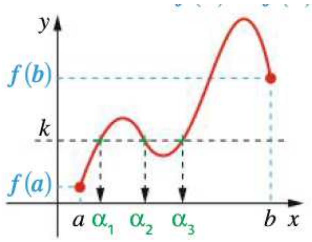
Rappelons que l'objectif de cette section est résoudre, grâce à la continuité, une équation de la forme

$$f(x) = k.$$

Théorème 55 (Théorème des valeurs intermédiaires (version faible))**.** *Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$*

$$\textit{l'équation} \quad f(x) = k \quad \textit{admet au moins une solution dans l'intervalle} \quad [a; b].$$

Graphiquement, nous avons



Remarque. 1. Une manière de reformuler ce théorème est de dire que l'image d'un intervalle I par une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue est un intervalle [1].

2. Nos verrons une autre conséquence (un principe de dichotomie) de ceci lorsque nous aborderons l'utilisation de la continuité avec les suites.
3. Le véritable théorème des valeurs intermédiaires indique que k peut être compris entre $\min_{x\in[a;b]} f(x)$ et $\max_{x\in[a;b]} f(x)$. Cela permet d'accroitre la portée de ce qui vient d'être énoncé.

Voyons cela en application sur un exemple.

Exemple 9.2.1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$. Nous allons prouver que l'équation

$$f(x) = -1 \tag{9.2.1}$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3; 0]$.

1. La fonction f étant un polynôme, il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En conséquence, cette fonction est donc continue sur $[-3; 0]$.
2. De plus, $f(-3) = -3$ et $f(0) = 0$. Ainsi, -1 se trouve bien dans l'intervalle d'arrivée :

$$f(-3) \leqslant -1 \leqslant f(0).$$

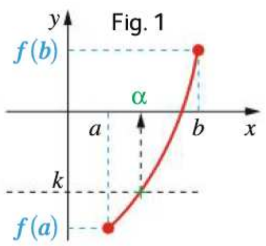
3. Le théorème des valeurs intermédiaires 55 nous assure donc qu'il existe au moins une solution $\alpha \in [-3; 0]$ (l'intervalle de départ) de (9.2.1).

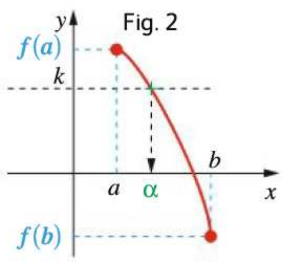
Remarque. L'utilisation de la calculatrice permet d'observer la courbe et de préciser notre réponse en indiquant qu'il semble exister exactement deux solutions à l'équation (9.2.1).

Parfois, il est préférable d'avoir une solution **unique**, pour cela il faut ajouter une hypothèse additionnelle.

Théorème 56 (Théorème de la bijection)**.** *Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur $[a; b]$. Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$*

$$\textit{l'équation} \quad f(x) = k \quad \textit{admet une unique solution dans l'intervalle} \quad [a; b].$$





Remarque. 1. L'hypothèse de monotonie se vérifie facilement en étudiant les variations de la fonction (à travers le signe de sa dérivée f').

2. En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors le théorème de la bijection nous assure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a; b]$.

1. Le lecteur pourra s'interroger si la réciproque est vérifiée : si l'image d'un intervalle par f est encore un intervalle, est-ce que f est continue ? A cet effet, le lecteur pourra étudier la fonction $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ lorsque $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Le théorème de Darboux répond à cette question (cf. [?]).

3. Le mot *bijection* est le nom savant utilisé pour désigner une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle tout élément y se trouvant entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent $\alpha \in [a;b]$.

Voyons maintenant comment répondre à la question posée en début de chapitre à l'aide de ces nouveaux résultats.

Exemple 9.2.2. Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $[-1;2]$, elle est donc continue sur cet intervalle. L'étude de la dérivée nous permet d'obtenir le tableau suivant.

x	-1		1		2
$f(x)$	18	$\searrow$	2	$\nearrow$	9

En particulier, ce tableau nous assure que $f(x) \in [2;18]$.

1. Puisque $0 \notin [2;18]$ (l'intervalle d'arrivée), l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution. Graphiquement, la droite $y = 0$ ne rencontre jamais la courbe C_f.
2. D'après le tableau de variations, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-1;1]$. De plus, $10 \in [2;10]$ (l'intervalle d'arrivée). Alors, d'après le théorème de la bijection 56, il existe une unique solution $\alpha \in [-1;1]$ (l'intervalle de départ) de l'équation $f(x) = 10$.

x	-1		α		1
$f(x)$	18	$\searrow$	10	$\searrow$	2

Ensuite, pour déterminer un encadrement de α, il suffit d'utiliser la calculatrice pour afficher un tableau de valeurs de la fonction sur $[-1;1]$ avec un pas de $0,1$. Nous trouvons alors que

$$f(-0,4) \approx 11,02 \quad \text{et} \quad f(-0,3) \approx 9,943$$

donc $-0,4 < \alpha < -0,3$. En réduisant le pas, il est possible d'affiner la précision de l'encadrement (par exemple en affichant les valeurs de la fonction sur $[-0,4;-0;3]$ avec un pas de $0,01$).

3. Pour résoudre l'équation $f(x) = 5$, nous constatons que la fonction f est continue sur $[-1;2]$ et $5 \in [2;18]$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe au moins une solution à notre problème. En reprenant les arguments du point précédent, il est possible de montrer qu'il existe exactement deux solutions β et γ telles que

$$\beta \in [-1;1] \quad \text{et} \quad \gamma \in [1;2]$$

vérifient $f(\beta) = f(\gamma) = 5$. Il est d'ailleurs possible de montrer (à l'aide de la calculatrice) que $0,2 < \beta < 0,3$ et $1,6 < \gamma < 1,7$. De manière schématique, tout ceci est visible dans le tableau suivant

x	-1		β		1		γ		2
$f(x)$	18	$\searrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\nearrow$	9

Le théorème 55 précédent se généralise aisément à d'autres situations. Par exemple, si $I = [a;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, la continuité et la stricte monotonie de f sur I nous assure que, pour tout $k \geqslant f(a)$, l'équation

$$f(x) = k$$

admet une unique solution $\alpha \in [a;+\infty[$. Tout ceci fonctionne également si $I = [a,b[$ avec $\lim_{x\to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ou encore si $I =]-\infty;b[$ avec $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$, etc ... Tout ceci semblera limpide pour le lecteur à l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 9.2.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x - 2$.

1. Démontrer que f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $\mathbb{R}$.
3. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

Exercices à traiter : 7 page 117 et 34 page 123 (cf. méthode 4 page 117) ; 8 page 117 et 35 âge 123 à faire à la maison. Exercices d'entrainements : 36 à 39 page 123 .

Pour conclure cette section, abordons un dernier exemple qui pourrait être donné aux écrits du bac.

Exemple 9.2.4 (Etude d'une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire)**.**

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x - 12$.
   (a) Démontrer que l'équation $x^3 + 3x - 12 = 0$ admet une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3+6}{x^2+1}$ et notons C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   (a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite (d) d'équation$y = x$.
   (c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.
   (d) En déduire le tableau des variations de f.
   (e) En utilisant la question 1), démontrer que : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$.
   (f) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Exercices à traiter : 12 page 119 (cf. méthode 6 page 119) ; Exercices d'entrainements : 44 à 47 page 124.

9.3 Continuité et suites

Nous avons déjà étudié des suites définies par récurrence à l'aide d'une fonction f : $u_0 \in \mathbb{R}$ étant donné, nous avions

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il s'agit des premiers système dynamiques (qui évoluent au cours d'un temps discret n) que nous avons étudié. Il semble naturel de s'interroger quant à ce qui peut se produire lorsque $n \to +\infty$: est-ce que le système (ici, la suite (u_n)) se stabilise vers une valeur d'équilibre à partir d'un certain rang ?

Pour répondre à la question posée plus haut, il convient d'abord de voir quel est le lien entre la continuité d'une fonction et les limites de suites.

Proposition 57 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Les assertions sont alors équivalentes.*

1. *f est continue en x_0.*
2. *Pour toute suite (x_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Ceci permet d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 58. *Soit (u_n) une suite définie par*

$$u_n = \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}; \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si f est une fonction continue et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors l est solution de l'équation

$$l = f(l). \tag{9.3.1}$$

Remarque. 1. Il est essentiel d'établir que la suite (u_n) converge. Après cela, il est alors possible de chercher à identifier la valeur de la limite l.

2. Nous dirons que l est un point fixe de la fonction f.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 9.3.1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n) est une suite décroissante et que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge. Nous noterons sa limite l.
3. Démontrer que l est solution de l'équation
$$l^2 - l - 2 = 0.$$
Déterminer la valeur de l.

Exercices à traiter : 5 page 115 (cf. méthode 3 page 115), 9 page 118 (cf. méthode 5 page 118) et 43 page 124 ; 6 page 115 et 10 page 118 à faire à la maison. Exercices d'entrainements : 29 à 32 page 123 ; 40 à 42 page 124.

9.4 Principe de Dichotomie (pour aller plus loin)

Le théorème des valeurs intermédiaires 55 est essentiellement équivalent au résultat suivant dont la démonstration fournit un algorithme intéressant de dichotomie permettant d'approcher numériquement une solution d'une équation.

Théorème 59 (Bolzano). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < 0 < f(b)$.*[2] *alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. Ce résultat s'obtient aisément à partir du principe de dichotomie. A cet effet, posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et définissons $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Deux cas de figures s'offrent à nous :
$$\text{soit} \quad f(m_0) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad f(m_0) \leqslant 0.$$
Dans le premier cas, nous posons $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$; dans le second, nous posons $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$. Il nous reste à répéter ce procédé avec $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Ceci fournit deux suites (a_n) et (b_n) qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n.$$
De plus, par construction, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ces deux suites sont alors adjacentes et le théorème 28 nous assure qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c.$$
La fonction f étant continue sur $[a, b]$, nous en déduisons, d'après la proposition 57, que $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$. En outre, grâce en procédé de construction, nous savons également que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n).$$
En passant à la limite, nous en déduisons que $f(c) = 0$. □

Remarque. La démonstration fournit deux suite (a_n) et (b_n) qui permettent d'approcher par défaut et par excès le nombre c. De plus, l'erreur d'approximation commise est contrôlée puisque : $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Le résultat reste valable en supposons que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés : $f(a) \times f(b) < 0$.