

Chapitre 6

Géométrie spatiale (partie 1)

Dans ce chapitre nous allons reprendre et étendre le calcul vectoriel étudié en classe de 2^{de} et de 1^{ère}. Comme nous allons le voir, la plupart des concepts sont quasiment identiques. Du fait que l'espace offre un degré de liberté supplémentaire (par rapport au plan), nous allons aussi rencontrer quelques nouveautés.

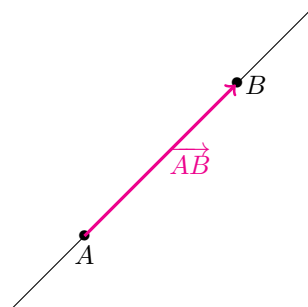
6.1 Rappels

Traiter les exercices de la page 277.

6.2 Vecteurs de l'espace

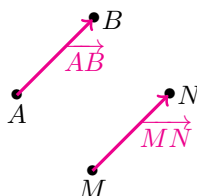
Les vecteurs de l'espace se définissent comment ceux du plan, à partir de translation.

Définition 6.2.1. Soient A et B deux points de l'espace. Nous appelons \overrightarrow{AB} l'unique translation qui transforme le point A en B .



Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour direction la droite (AB) , pour sens celui de A vers B et pour norme la longueur AB .

Remarque. 1. Comme dans le plan, un vecteur possède plusieurs représentants. Soient M et N deux points de l'espace tels que la translation \overrightarrow{AB} transforme M en N alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.



2. De plus, nous avons l'équivalence suivante :

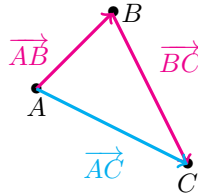
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \iff ABNM \text{ est un parallélogramme.}$$

3. La translation qui transforme le point A en lui-même est noté $\vec{0}$, le vecteur nul.

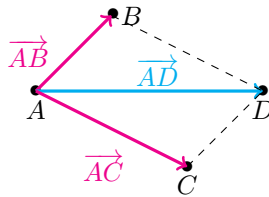
L'addition de vecteurs s'effectue comme dans le plan et elle vérifie les mêmes règles.

Proposition 28. Soient A, B et C des points de l'espace.

1. (Relation de Chasles) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$:



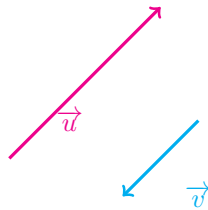
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est l'unique point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme :



La définition de colinéarité présentée en seconde est toujours valable dans l'espace.¹

Définition 6.2.2. Deux vecteurs, non nuls, \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Remarque. Géométriquement, cela signifie que les **vecteurs** \vec{u} et \vec{v} **possèdent la même direction** (mais pas nécessairement le même sens).



Définition 6.2.3. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs **non colinéaires**. Nous dirons que \vec{w} est **une combinaison linéaire** de \vec{u} et \vec{v} s'il existe des réels α et β tels que

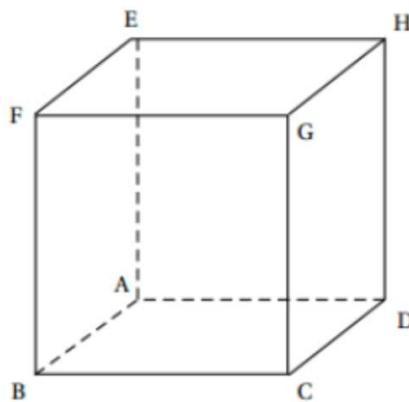
$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Remarque. Géométriquement, cela signifie juste que \vec{w} est obtenue à partir de fragments de \vec{u} et \vec{v} . Notons en passant que ces trois vecteurs sont dans le même plan, nous dirons qu'ils sont **coplanaires**.

1. En fait, cette définition de dépend pas de la dimension de l'espace ambiant.

Prenons quelques instants sur l'utilisation de combinaisons linéaires pour construire des points.

Exemple 6.2.1. A l'aide de la figure ci-dessous



construire les points définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} \quad ; \quad \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HD} \quad ; \quad \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{HS} = \overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}.$$

Exercices à traiter : 1-2 page 281 puis 34 à 37 page 292 (cf. méthode 1 page 281)

6.3 Droites et plan de l'espace

Dans cette section nous allons nous focaliser sur certains sous-ensembles remarquables de l'espace.

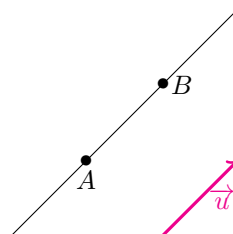
6.3.1 Droites

Après les points, les droites sont les ensembles les plus simples de l'espace. Débutons par une définition.

Définition 6.3.1. Une droite se définit de manière équivalente par :

- deux points distincts A et B du plan ;
- un point A et un vecteur non nul \vec{u} ; la droite obtenue passe alors par A et est parallèle à la direction du vecteur \vec{u} .

Dans le second cas, le vecteur impliqué est appelé **vecteur directeur** de la droite.



Ici, le vecteur \vec{u} dirige la droite (AB) .

Remarque. La direction d'un vecteur directeur est parallèle à la droite (AB) . Tout vecteur colinéaire à \vec{u} est également un vecteur directeur de la droite (AB) . Les droites sont des objets de dimension 1 car elles nécessitent qu'un seul vecteur pour être définie.

L'avantage de proposer une définition vectoriel d'une droite est que cela permet d'en obtenir une caractérisation.

Proposition 29 (Caractérisation d'une droite). Soient \mathcal{D} une droite, $A \in \mathcal{D}$ et \vec{u} un vecteur directeur de cette droite. Nous avons la caractérisation suivante des points M appartenant à la droite \mathcal{D} .

$$M \in \mathcal{D} \iff \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires.}$$

Remarque. En classe de seconde, c'est ce résultat, combiné à l'utilisation de coordonnées et du déterminant qui permet d'obtenir l'équation cartésienne d'une droite.

6.3.2 Plans

Après les droites, surviennent les plans.

Définition 6.3.2. Un plan se définit de manière équivalente par :

- trois points non alignés (ABC) ;
- par un point A et deux vecteurs (non nuls) non colinéaires \vec{u} et \vec{v} : $(A; \vec{u}; \vec{v})$.

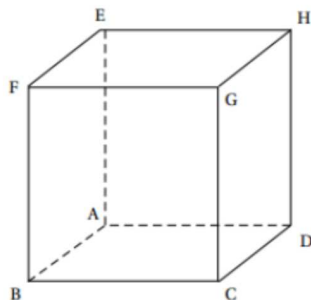
Le couple $(\vec{u}; \vec{v})$ est appelé **direction** du plan.

Remarque. Le lecteur notera que trois points distincts A, B et C forment un plan si et seulement si ils ne sont pas alignés (i.e. si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires).

Les plans sont des objets de dimension 2 car ils nécessitent deux vecteurs pour être défini.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 6.3.1. Reprenons le cube d'un exemple précédent :

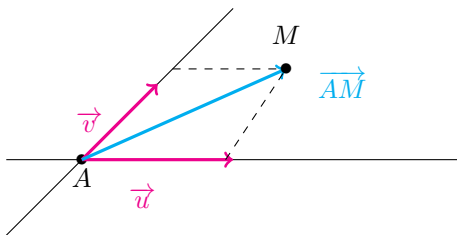


le plan (CFH) s'obtient à partir du point C et des vecteurs (non colinéaires) \overrightarrow{CF} et \overrightarrow{CH} .

Comme pour les droites, les plans peuvent se caractériser de manière vectorielle. D'ailleurs cette caractérisation justifie l'introduction de la notion de combinaisons linéaires.

Proposition 30 (Caractérisation d'un plan). Soit \mathcal{P} le plan $(A; \vec{u}; \vec{v})$. Nous avons alors l'équivalence suivante :

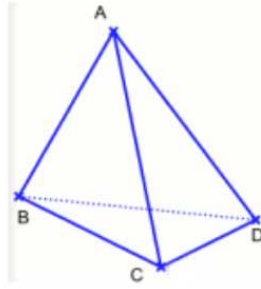
$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.$$



Sur le graphique (ci-dessus), le vecteur \overrightarrow{AM} est obtenu à partir d'une fraction du vecteur \vec{u} et du vecteur \vec{v} .

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 6.3.2. Soit $ABCD$ un tétraèdre :



et considérons M le point vérifiant $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. Démontrons que M est un élément du plan (ABC) . Pour cela, il suffit (d'après la proposition 30) de montrer que \overrightarrow{AM} peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Autrement dit, nous devons trouver α et β tels que

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Pour cela, il suffit de réécrire l'égalité $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$:

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \iff \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

pour ensuite utiliser la relation de Chasles à plusieurs reprises

$$\overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Il suffit ensuite de passer $2\overrightarrow{MA}$ dans le second membre et de tout diviser par 2 pour obtenir

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{i.e.} \quad \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

Exercices à traiter : 3-4 page 281 puis 38 à 40 page 292 (cf. méthode 2 page 281).

En classe de seconde, vous avez étudié la position relative de droites (parallèles ou sécantes). Nous allons procéder de même ici, cette fois-ci pour les droites et les plans de l'espace.

6.4 Position relative de droites et de plans

En classe de seconde et en première, l'étude de la position relative de deux droites du plan se faisait assez simplement à l'aide des vecteurs directeurs associés. Suivant qu'ils étaient colinéaires ou non, les droites étaient parallèles ou sécantes. L'ajout du dimension, en passant du plan à l'espace, augmente le nombre de cas de figures.

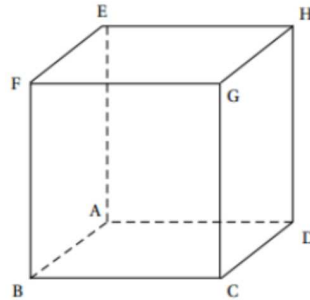
Proposition 31 (Position relative de droites). Soient d et d' deux droites de l'espace de vecteur directeur respectif \vec{u} et \vec{u}' . Les situations suivantes peuvent se produire :

\vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires.		\vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires.	
d et d' sont coplanaires et strictement parallèles.	d et d' sont coplanaires et confondues.	d et d' sont coplanaires et sécantes.	d et d' sont non coplanaires, aucun plan ne contient d et d' .

Remarque. Nous dirons que deux droites sont coplanaires si elles se situent dans le même plan.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 6.4.1. Reprenons le cube d'un exemple précédent :

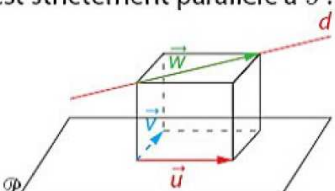
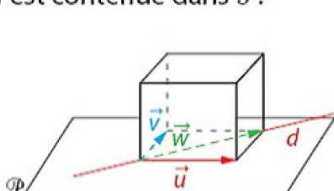
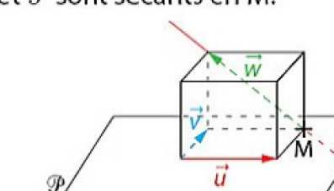


1. Les droites (EF) et (EG) sont coplanaires (dans le plan (EFG)) et sécantes (en E).
2. Les droites (AD) et (FG) sont coplanaires (dans le plan (ADF) par exemple) et (strictement) parallèles.
3. Les droites (AD) et (CG) sont ni coplanaires ni sécantes.

Remarque. A nouveau, comme dans les années précédentes, **la colinéarité est la clé permettant de connaître la position relative entre deux droites.**

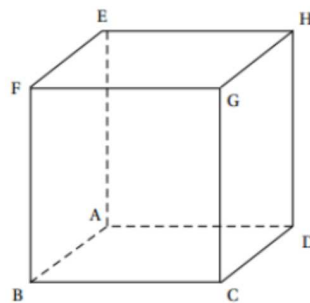
Traisons maintenant le cas de la position relative d'un plan et d'une droite.

Proposition 32 (Position relative d'un plan et d'une droite). Soient \mathcal{P} un plan de direction $(\vec{u}; \vec{v})$ et d une droite dirigée par \vec{w} . Les situations suivantes peuvent se produire :

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires : d et \mathcal{P} sont parallèles.		$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
d est strictement parallèle à \mathcal{P} .	d est contenue dans \mathcal{P} .	d et \mathcal{P} sont sécants en M .
		

Prenons un exemple.

Exemple 6.4.2. Reprenons le cube d'un exemple précédent. Le lecteur ajoutera mentalement sur la figure le point I , centre du quadrilatère $ABCD$.

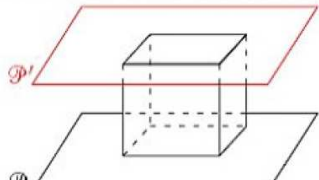
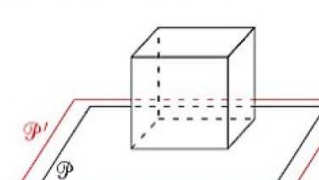
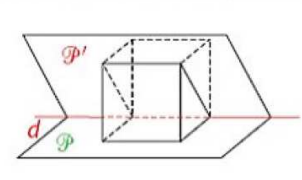


1. La droite (GI) et le plan (ADH) sont sécants car, par exemple, \vec{GI}, \vec{AD} et \vec{AH} ne sont pas coplanaires.

- La droite (EG) et le plan (EFG) sont parallèles puisque les vecteurs \overrightarrow{EG} , \overrightarrow{FE} et \overrightarrow{FG} sont coplanaires ; la droite (EG) est contenue dans le plan (EFG) .
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles. En effet, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ est une direction du plan (ABC) (il s'agit de deux vecteurs non colinéaires) et \overrightarrow{EG} est colinéaire à \overrightarrow{AC} .

Enfin, abordons la position relative entre deux plans.

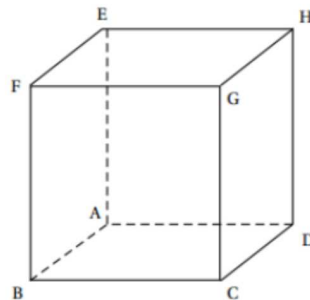
Proposition 33 (Position relative de plans). Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans. Les situations suivantes peuvent se produire :

\mathcal{P} et \mathcal{P}' ont même direction : \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles.		\mathcal{P} et \mathcal{P}' n'ont pas la même direction.
\mathcal{P} et \mathcal{P}' sont strictement parallèles.	\mathcal{P} et \mathcal{P}' sont confondus.	\mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants suivant une droite d .
		

Remarque. Cette notion sera reprise, plus en détails, dans le deuxième chapitre de géométrie dans l'espace.

Prenons une fois de plus un exemple.

Exemple 6.4.3. Reprenons une nouvelle fois le cube d'un exemple précédent.



- (CGH) et (ADH) sont sécants suivant la droite (DH) .
- (BCG) et (ADH) sont strictement parallèles.
- (EAD) et (ADH) sont confondus.

Exercices à traiter : 5 page 283 ; 6 page 283 à faire la maison (cf. méthode 3 page 283).

6.5 Coordonnées de vecteurs et de points dans l'espace

Jusqu'à présent nous avons travaillé avec les vecteurs sans utiliser de coordonnées. Le lecteur sait pourtant à quel point de l'étude des vecteurs est plus simple à réaliser lorsque des coordonnées sont à disposition : il s'agit de cette fabuleuse idée de Descartes permettant de transformer n'importe quel problème géométrique en un problème algébrique.

Un autre avantage considérable est celui de l'abstraction : bien que cela ne soit pas toujours simple (et rarement agréable ou lisible), nous pouvons proposer des dessins dans l'espace à l'aide d'une perspective mais nous serions bien embêtés pour esquisser un cube de dimension 4. En revanche, il est très simple d'ajouter une coordonnée à un vecteur et de poursuivre nos calculs algébriques ou oubliant de faire des dessins.

6.5.1 Base de l'espace

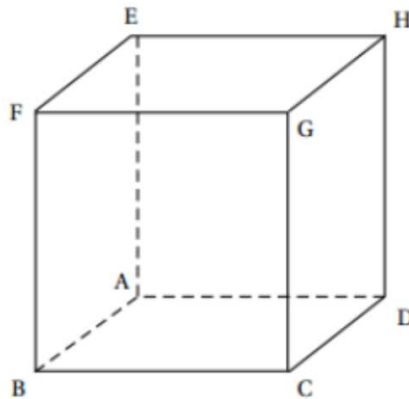
Afin de pouvoir donner des coordonnées à un vecteur, il est nécessaire de choisir une base de l'espace. Cela revient à choisir 3 vecteurs élémentaires à partir desquels nous pouvons construire (en tant que combinaison linéaire de ces derniers) n'importe quel autre vecteur.

Définition 6.5.1. Une base de l'espace $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires².

Remarque. Autrement dit, les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} ne sont pas coplanaires. Les physiciens utilisent fréquemment ceci et parle de repère de Frenet (lequel se visualise simplement à l'aide du pouce, de l'index et du majeur pour représenter les trois axes).

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 6.5.1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.

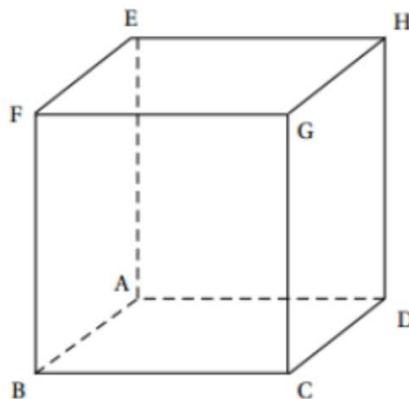


Le point A ne se trouve pas dans le plan (BCG) et ce dernier admet pour direction $(\vec{BC}; \vec{CG})$. Ainsi, n'étant pas coplanaires, le triplet $(\vec{AB}; \vec{BC}; \vec{CG})$ est une base de l'espace.

Proposer une autre base de l'espace.

Comme annoncé plus tôt, l'avantage d'une **base** est qu'elle permet d'expliquer comment **construire n'importe quel vecteur à partir de trois autres** (ceux qui forment la base). Cela revient à **exprimer un vecteur comme étant une combinaison linéaire des vecteurs de base**.

Exemple 6.5.2. Soit $ABCDEFGH$ un cube.



2. Une manière savante de résumer cela est de dire que la famille est *libre*.

Décomposons le vecteur \overrightarrow{AG} suivant la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG})$. Pour cela, il suffit d'observer³ que

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{BC} + 1 \times \overrightarrow{CG}.$$

Autrement dit, pour obtenir \overrightarrow{AG} nous avons besoin d'une fois \overrightarrow{AB} , d'une fois \overrightarrow{BC} et d'une fois \overrightarrow{CG} .

Remarque. Un moyen commode d'obtenir une base de l'espace est de choisir un plan (obtenu à l'aide de deux vecteurs non colinéaires) et d'ajouter un troisième vecteur formé d'un point se trouvant dans le plan et d'un point ne s'y trouvant pas.

Il est tout de même naturel de s'interroger : est-ce que cette décomposition est unique ? C'est-à-dire : n'est-t-il pas envisageable de trouver un deuxième chemin de sorte que, par exemple,

$$\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 1.5\overrightarrow{CG} \quad ?$$

Heureusement, la réponse à ceci est négative et cela permet d'associer des coordonnées (exprimées dans la base choisie) d'un vecteur donné.

Proposition 34 (Unicité de la décomposition suivant une base). Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace. Tout vecteur \vec{u} se décompose de manière **unique** sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

avec $x, y, z \in \mathbb{R}$. Les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base \mathcal{B} sont alors $\vec{u} = (x; y; z)$.

Exemple 6.5.3. En reprenant les résultats de l'exemple 6.5.2, nous voyons alors que le vecteur \overrightarrow{AG} a pour coordonnées (exprimées dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG})$)

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous constatons alors plusieurs choses :

- il convient de savoir montrer qu'une famille de vecteurs forme (ou non) une base de l'espace ;
- il faut ensuite être capable d'exprimer (parfois visuellement) un vecteur comme étant une combinaison linéaire d'autres vecteurs (lesquels forment une base de l'espace) afin d'obtenir ses coordonnées.

Remarque. Le lecteur pourra retenir qu'introduire une base adéquate simplifie presque systématiquement un problème donné.

Abordons ces points, les uns après les autres. Traitons un premier exemple permettant de montrer qu'une famille n'est pas une base de l'espace.

Exemple 6.5.4. Soit $ABCDEFGH$ un cube et considérons M et N deux points tels que

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}.$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GE}$.
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FB}$ et \overrightarrow{GE} sont coplanaires. Autrement dit, $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{FB}; \overrightarrow{GE})$ n'est pas une base de l'espace.

Voici quelques éléments de réponses.

1. Grâce à la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

d'après les hypothèses. En outre, nous avons $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{FE}$, d'où

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{FB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE}) = \overrightarrow{FB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GE}$$

grâce à la relation de Chasles.

3. ou d'utiliser la relation de Chasles à trois reprises

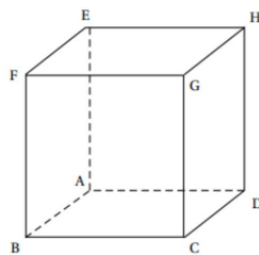
2. Nous avons donc montré que \overrightarrow{MN} est une combinaison linéaire de \overrightarrow{FB} et de \overrightarrow{GE} (lesquels ne sont pas colinéaires). Cela signifie que ces vecteurs sont coplanaires. En conséquence, $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{FB}; \overrightarrow{GE})$ n'est pas une base de l'espace.

Remarque. Il faut retenir qu'il suffit de montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire des deux autres pour justifier qu'une famille de trois vecteurs n'est pas une base de l'espace. Cela revient à montrer que les vecteurs sont coplanaires.

Exercices à traiter : 10 et 11 page 285 ; 9 page 285 à faire à la maison (cf. méthode 5 page 285). Exercices d'entraînements : 46 à 52 page 292.

Il est important de savoir décomposer visuellement des vecteurs suivant une base donnée afin d'obtenir leurs coordonnées.

Exemple 6.5.5. Soit $ABCDEFGH$ un cube.



Il est évident que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace. Déterminons les coordonnées de \overrightarrow{BH} dans cette base. Pour cela, il convient d'utiliser à de nombreuses reprises la relation de Chasles :

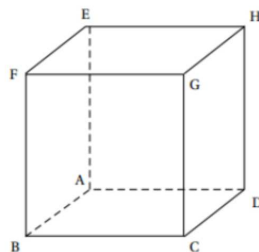
$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

puisque $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$. D'où, $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Exercices à traiter : 12 page 285 ; 13 page 285 à faire à la maison (cf. méthode 6 page 285). Exercice d'entraînement : 49 page 293.

Voyons maintenant un exemple permettant de justifier, par un calcul, qu'une famille de vecteurs est une base de l'espace.

Exemple 6.5.6. Soit $ABCDEFGH$ un cube.



et montrons que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG})$ est une base de l'espace. Pour cela, il suffit de se placer dans une **base connue** (ou évidente) de l'espace et de montrer que la relation suivante

$$a\overrightarrow{CG} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{BH} = \vec{0} \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

entraîne forcément que $a = b = c = 0$. Pour cela, il convient d'exprimer l'égalité précédente à l'aide des coordonnées exprimées, par exemple, dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. Dans cette base, nous avons

$$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

car $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Le système devient alors

$$a \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b - c = 0 \\ c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

d'où $a = b = c = 0$. Autrement dit les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG}$ ne peuvent être obtenus comme combinaison linéaire des deux autres. Il s'agit bien d'une base.

Remarque. Une démonstration équivalente est proposée dans la méthode 6 page 287.

Exercices à traiter : 14 page 287 ; 15 page 287 et 56 page 293 à faire à la maison (cf. méthode 7 page 287).
Exercices d'entraînements : 53, 55, 57, 58 page 293.

6.5.2 Repère de l'espace

Maintenant que nous sommes capables, à partir d'une base, de donner des coordonnées à un vecteur. Il semble intéressant de faire de même, cette fois-ci avec des points. Pour cela, il va falloir choisir un repère en fixant un point d'origine.⁴

Définition 6.5.2. Un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est composé d'un point O et d'une base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Le point O est appelé origine du repère.

Comme annoncé, l'utilisation d'un repère permet d'obtenir les coordonnées d'un point.

Proposition 35 (Unicité des coordonnées d'un point dans un repère). Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M , il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que

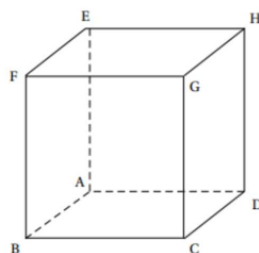
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Ce triplet correspond aux coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Remarque. Vocabulaire : x correspond à l'abscisse du point M , y son ordonnée et z sa côte.

Reprenons un ancien exemple pour illustrer ce nouveau résultat.

Exemple 6.5.7. Soit $ABCDEFGH$ un cube.



Plaçons nous dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. D'après la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

Ainsi, G a pour coordonnées $(1; 1; 1)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Remarque. Dans le fond, une fois le repère choisi, il suffit de « lire » les coordonnées comme en classe de seconde ou de première.

4. Ceci est très fréquent en physique en mécanique du point. Systématiquement, le physicien choisit le repère le plus adapté au problème étudié.

6.5.3 Calculs avec des coordonnées

Maintenant que nous savons déterminer les coordonnées de vecteurs ou de points, nous pouvons retrouver les formules habituelles (vues en seconde et en première) adaptées à l'espace.

Proposition 36. Soit $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace.

- Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}.$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors

$$\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Remarque. Dorénavant, nous essayerons de noter les coordonnées des vecteurs en colonnes et celles des points en lignes; toutefois, pour des raisons de mise en page, il est possible que nous dérogerions de temps à autres à cette règle.

La plupart du temps, il est préférable d'utiliser des coordonnées (après avoir choisi un repère approprié) car cela facilite grandement les calculs. Nous allons voir ce que cela donne dans l'exemple suivant.

Exemple 6.5.8. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère et considérons les points

$$A(-1; 3; 1), B(3; 1; -1), C(1; -3; -1), D(-5; 0; 2) \text{ et } E(1; 17; 3).$$

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Voici des éléments de réponses :

1. Pour montrer que (AB) est parallèle (CD) , il suffit de montrer que les vecteurs directeurs associés sont colinéaires. Ici, nous avons

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nous constatons ensuite que $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ d'où le résultat.

Remarque. Ceci est beaucoup plus simple que d'avoir à utiliser la relation de Chasles pour obtenir le même résultat.

Exercices à traiter : 20 (Q2 seulement) page 288 et 66 page 294; 22 (Q2 seulement) à faire à la maison (cf. Méthode 9 page 288). Exercices d'entraînements : 67-68 page 294.

Remarque. Voici une question pouvant faire office de piste de réflexion :

- alors que le déterminant était un outil remarquablement puissant en classe de 2^{de} et de 1^{ère}, notamment pour établir de la colinéarité (dans le plan), comment se fait-il que celui-ci soit absent de notre exposé ?

Voici un dernier résultat, donné à toute fins utiles, permettant de retrouver l'une des formule déjà rencontrée dans le plan en classe de seconde.

Proposition 37. Soient $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$ alors I le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées

$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

6.6 Représentation paramétrique d'une droite

Pour clore ce chapitre, nous allons proposer un autre point de vue sur les droites de l'espace. L'idée est d'obtenir une représentation plus dynamique de cet objet. En quelques sortes, il s'agit d'exprimer une droite comme étant une fonction dépendant de 1 paramètre.

Dans ce qui suit, nous considérons d la droite qui passe par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Définition 6.6.1 (Représentation paramétrique d'une droite). *La représentation paramétrique de la droite d est donnée par le système ci-dessous :*

$$(S) : \begin{cases} x = x_A + t \times a \\ y = y_A + t \times b \\ z = z_A + t \times c \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Remarque. 1. Ainsi, pour chaque valeur de t , nous obtenons les coordonnées d'un point se trouvant sur la droite d .

2. Cette nouvelle écriture (la représentation paramétrique d'une droite) n'est rien d'autre qu'une reformulation de la proposition 29 : $M(x; y; z)$ se trouve sur d si et seulement si

$$\overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t \vec{u}.$$

Il reste ensuite à utiliser la formule permettant de déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AM} à partir de celles de A et M pour obtenir le système (S) .

3. En réfléchissant, il se pourrait qu'une même droite admette deux représentations distinctes (obtenues à partir de points différents et de vecteurs directeurs colinéaires).

Les systèmes

$$(S) : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S') : \begin{cases} x = -9s + 4 \\ y = -12s + 4 \\ z = 3s \end{cases} \quad \text{avec } s, t \in \mathbb{R}.$$

représentent-ils la même droite? La réponse à cela s'obtient en observant que les vecteurs directeurs associés sont colinéaires et que les points $(1; 0; 1)$ et $(4; 4; 0)$ vérifient l'un ou l'autre système d'équation (pour une certaine valeur de s et de t).

Il faut donc retenir qu'une droite possède une infinité de représentation paramétrique : pour cela, il suffit de changer le point A par un autre point de la droite ou le vecteur \vec{u} par un vecteur colinéaire.

Mettons ceci en application sur un exemple.

Exemple 6.6.1. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace (nous notons respectivement I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$). Considérons les points $A(2; 3; -1)$ et $B(1; -3; 2)$.

- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- Le point $C(-2; -21; 10)$ se trouve-t-il sur la droite (AB) ? Justifier.
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre la droite (AB) et le plan (OIJ) .

Voici quelques éléments de réponses.

- La droite (AB) est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors, d'après le cours, sa représentation paramétrique est donnée par

$$(S) : \begin{cases} x = 2 + t \times -1 \\ y = 3 + t \times -6 \\ z = -1 + t \times 3 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. Il suffit de vérifier s'il existe un paramètre t tel que les coordonnées (x_C, y_C, z_C) soient une solution du système (S) :

$$\begin{cases} -2 = 2 - t \\ -21 = 3 - 6t \\ 10 = -1 + 3t \end{cases}$$

La première ligne fournit $t = 4$ et la troisième (par exemple) indique que $t = \frac{11}{3}$, ce qui est impossible. Donc $C \notin (AB)$.

3. Soit $K(x; y; z;)$ le point d'intersection en question (la démonstration justifiera *in fine* son existence) se trouve dans le plan (OIJ) donc $z = 0$. De plus, ses coordonnées vérifient le système (S) . D'où,

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

La dernière ligne indique que $t = \frac{1}{3}$ et cela nous permet d'en déduire les valeurs de x et y :

$$x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad y = 3 - 1 = 2.$$

Autrement dit, K a pour coordonnées $K(\frac{5}{3}; 2; 0)$.

Exercices à traiter : 16 page 287; 19 page 287 à faire à la maison (cf. Méthode 8 page 287). Exercices d'entraînements : 71-78 page 294.

La représentation paramétrique de droites donne un moyen pratique pour déterminer la position relative entre deux droites (déterminer un éventuel point d'intersection par exemple). En effet, nous disposons du résultat suivant.

Proposition 38. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si \vec{AB} est colinéaire à \vec{CD} . En particulier, les points A, B et C sont alignés si et seulement si \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.

Remarque. En conséquence, nous pouvons faire les observations suivantes (lesquelles se démontrent aisément grâce aux vecteurs) :

- si les vecteurs directeurs (associés à deux droites distinctes) ne sont pas colinéaires alors les droites sont sécantes.
- si deux droites sont parallèles alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
- si deux droites sont parallèles alors tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.

Voyons ceci en application.

Exemple 6.6.2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites données par :

$$(S_1) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) : \begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s - 1 \\ z = s + 1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Voici quelques éléments de réponses.

1. le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige la première droite tandis que le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige la seconde. Il se trouve que ces vecteurs ne sont pas colinéaires. En conséquence, les droites ne sont pas parallèles : elles sont sécantes en un point $K(x; y; z)$ ou non coplanaire.
2. Si les droites sont sécantes, cela signifie que les coordonnées de K sont solutions des systèmes (S_1) et (S_2) , nous devons donc résoudre

$$\begin{cases} t + 1 = 3s + 2 & (L_1) \\ 2t - 3 = s - 1 & (L_2) \\ -t + 2 = s + 1 & (L_3) \end{cases}$$

Choisissons alors deux lignes parmi les trois présentes (par exemple (L_2) et (L_3)). Nous obtenons

$$\begin{cases} 2t - 3 = s - 1 & (L_2) \\ -t + 2 = s + 1 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2t - 3 = s - 1 & (L_2) \\ -t + 1 = s & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 & (L_2) \\ 0 = s & (L_3) \end{cases}$$

Il convient de voir si ces valeurs de s et t sont solutions de (L_1) (si jamais ce n'était pas le cas cela signifierait que le système précédent n'admettait pas de solution et que les droites étaient non coplanaires). Ici, c'est bien le cas. Nous en déduisons donc que les droites sont sécantes, les coordonnées du point K s'obtiennent alors grâce à (S_2) (par exemple) en remplaçant s par 0, d'où

$$K(2; -1; 1).$$

Exercices à traiter : 23 page 289 et 98 page 296 ; 25 page 289 à faire à la maison (cf. Méthode 8 page 287).
Exercices d'entraînements : 90-97 page 296.

6.7 Curiosité en grande dimension (pour aller plus loin)

Il n'est pas vraiment possible pour l'être humain de se représenter un objet en quatre dimension (ou plus). Il est cependant possible de conceptualiser ce qui doit se produire. Imaginons que nous surplombions un monde vivant dans une feuille en papier, un monde en deux dimension. Si nous prenions un cube de notre univers, les habitants de ce monde ne pourraient l'apercevoir qu'au moment où une partie du cube traverse la feuille de papier et pénètre dans leur monde. En faisant ceci, les habitants observeraient une tranche du cube et seraient face à un carré. Il n'est donc pas difficile de généraliser ce procédé en se disant que si des êtres nous observaient depuis un monde en quatre dimension et s'amusaient à vouloir nous montrer un cube de leur univers (en quatre dimensions) nous ne verrions qu'une tranche de celui-ci et ferions face à un cube normal.

Bien que notre intuition soit un peu gênée par des espaces de dimension supérieurs à trois, ces ensembles interviennent très rapidement lors de l'étude de certains problèmes. En effet, grossièrement, ajouter une dimension revient à considérer un paramètre supplémentaire. Par exemple, pour décrire le mouvement d'un oiseau nous avons besoin de connaître sa position dans l'espace. En revanche, il est possible que nous ayons également besoin de connaître la durée de son mouvement, la pression atmosphérique, la température, etc... la considération de ceci force à introduire plus de dimensions pour prendre en compte ces nouveaux paramètres. En statistiques, certains problèmes de modélisation comme la météorologie met en jeu plusieurs milliers de paramètres.

L'un des intérêts majeur des coordonnées cartésiennes est que nous pouvons étudier des choses qui dépassent notre imagination. En effet, pour ajouter une dimension il suffit d'ajouter une coordonnée à notre vecteur. Il devient donc possible de faire des calculs sur des choses que nous ne pouvons visualiser. Cela va parfois à l'encontre de notre intuition. Voyons ceci au travers d'un exemple.

Débutons dans le plan et considérons un carré de côté 2 dont le centre est placé en $(0, 0)$. Plaçons des disques de rayon 1 dans les zones suivantes : un premier disque centré au point $(1; 1)$, un deuxième en $(1; -1)$, un autre en $(-1; 1)$ et un dernier en $(-1; -1)$. Il est alors possible de placer un dernier disque en $(0; 0)$ puis de l'agrandir jusqu'à ce qu'il touche les quatre disques que nous avons disposés dans le carré au préalable.

Bien sûr, il est possible de procéder de manière similaire dans l'espace. Cette fois-ci nous avons un cube de côté 2, 8 boules de rayon 1 centrées aux points $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ et enfin une dernière boule placée en $(0; 0; 0)$ dont le rayon est plus grand possible (avec pour condition que cette nouvelle boule ne puisse empiéter sur les autres).

A vrai dire, pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Il n'est plus possible de faire de dessin mais nous pouvons imaginer un hypercube de côté 2 (que nous noterions $[-2; 2]^d$) en dimension d et placer des boules aux points $(\pm 1; \dots; \pm 1)$ comme auparavant pour enfin placer une dernière boule au centre avec les mêmes restrictions qu'auparavant.

A partir de quelle dimension cette dernière boule dépasse du cube $[-2; 2]^d$?

De manière intuitive, nous serions tentés de répondre : jamais ! Voyons ce que nous disent les calculs. Nous avons vu que la distance d'un point $M = (x_1; x_2)$ à l'origine valait

$$d(O, M) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

En dimension d , il s'agit de la même formule. C'est-à-dire, si M a pour coordonnées $(x_1; x_2; \dots; x_d)$ (il n'est plus vraiment possible de parler d'abscisses ou d'ordonnées, nous numérotions donc les coordonnées par des nombres x_1, \dots, x_d) nous avons la formule suivante :

$$d(O, M) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$$

Or, dans le problème que nous considérons les points M , centres des boules, ont des coordonnées de la forme $(\pm 1; \dots; \pm 1)$ donc $d(O, M) = \sqrt{d}$. Ainsi, puisque ces boules sont de rayon 1, cela entraîne que le plus grand rayon possible pour la boule centrale vaut $\sqrt{d} - 1$. En conséquence, la boule centrale déborde du cube si

$$\sqrt{d} - 1 > 2 \iff d > 9$$

ce qui n'était pas du tout intuitif. En fait, il est même possible de préciser ce résultat. Il s'agit d'un domaine des mathématiques qui s'appelle *la concentration de la mesure*. L'un des résultats de cette théorie permet d'affirmer que le volume de la boule centrale restant dans le cube s'approche très vite (exponentiellement vite) de zéro lorsque la dimension devient de plus en plus grande.

6.7.1 Distances

La distance que nous venons de voir s'appelle la distance euclidienne. Il existe d'autre façon de mesurer la distance entre deux points, l'une d'elle s'appelle la distance de « Manhattan » (en rapport avec le quartier de New-York). La raison derrière cette terminologie est la suivante : la plupart des villes américaines sont construites sur la forme d'un quadrillage. Ainsi, pour rejoindre un point A à un point B de la ville, nous sommes forcés de suivre ce quadrillage et d'arpenter les côtés des carrés de ce quadrillage. Ainsi, la distance calculée correspond à celle qui est effectivement parcouru à pied plutôt que celle obtenue « à vol d'oiseau ».

Formellement, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors

$$AB = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue d'un nombre réel. Cette formulation n'engendre que très peu de différences notables avec la géométrie classique (grossièrement tout diffère d'une constante multiplicative universelle). En revanche, certain objets bien connu sont un peu modifiés. Pour voir cela nous devons adopter quelques notations : $d_2(A, B)$ pour désigner la distance euclidienne (celle vu en cours) entre deux points et par $d_1(A, B)$ pour la distance de Manhattan. Avec ces notations, il est possible de définir un disque de centre A et de rayon $r > 0$ comme étant l'ensemble des points M vérifiant :

$$d_2(A, M) \leq r$$

et nous obtiendrons la figure classique que vous avez pu rencontré au collège. En revanche, si nous remplaçons d_2 par d_1 dans le formule précédente, notre cercle prendra alors la forme d'un carré !

Il existe d'innombrables distances en mathématiques, chacune ayant une utilité, les quelques mots précédents ne font qu'effleurer la surface de cette notion.

6.7.2 Pythagore

Durant votre scolarité du collège, le théorème de Pythagore fut, sans doute, l'un des résultats qui a occupé une grande partie du programme. Il est même fort possible que votre professeur ait proposé une démonstration permettant de vous assurer que l'énoncé de ce théorème était vrai. Néanmoins, votre professeur, a sûrement du omettre une chose fondamentale à son propos. Ma question est donc la suivante :

le théorème de Pythagore est-il tout le temps vrai ?

Cette question peut sembler incongrue, pourtant elle mérite quelques mots. Votre professeur du collège a du présenter le théorème de Pythagore et dessiner des triangles sur le tableau noir de la salle de cours. Implicitement, cela signifie que ses dessins sont fait sur une surface plane ! A votre avis, le théorème de Pythagore est-il encore vrai si nous dessinons nos triangles sur un ballon ? ou à l'intérieur d'un bol ?

La réponse à ces questions est négative ! D'ailleurs, il est même possible de construire, sur un un ballon, un triangle possédant 3 angles droits ! En d'autres termes, cette remarque signifie qu'il existe d'autre géométrie que celle d'Euclide (étudiée au collège, puis au lycée). Grossièrement, il y a aussi la géométrie sphérique (celle-ci pouvant être visible à l'échelle de la Terre, permettant aux avions d'effectuer des vols optimaux entre Paris et Tokyo) et la géométrie hyperbolique. Bien sûr, il existe d'autres géométries que celles que nous venons d'énoncer (bien qu'il s'agisse des principales). Par exemple, la géométrie qui a permis au physicien Albert Einstein de formaliser sa théorie de la relativité repose sur une géométrie dite « pseudo-riemannienne ».