

Partie 3 - sous-espaces vectoriels

exo 12 1) Soient f et g deux fonctions dérivables
 $\lambda \in \mathbb{R}$

Puisque $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ l'ensemble des
fonctions dérivables est un sous-espace (seul en
de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
composé d'objets)

2) Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
c'est également un espace vectoriel (en omettant
quelques vérifications fastidieuses)

2) $\mathbb{Z}$ n'est pas un espace vectoriel
car si $x = 0 \in \mathbb{Z}$, $y = 1 \in \mathbb{Z}$ et $\lambda = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$
alors $x + \lambda y \notin \mathbb{Z}$.

exo 13 1) $P \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0) \in P$
si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

il faut vérifier que $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in P$

$$\begin{aligned} \text{car } 2(x+x') - 3(y+y') + 5(z+z') &= \lambda [2x - 3y + 5z] + 2x' - 3y' + 5z' \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 \quad \text{puisque } \vec{u}, \vec{v} \in P \end{aligned} \quad (1)$$

2) P' n'est pas un seV car $(0, 0, 0) \notin P'$

exo 14

1) les arguments de l'exo 13 mq E_1 est un seV
 E_2 n'est pas un seV.

E_4 n'est pas un seV car
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_4$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_4$ mais $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E_4$

E_5 n'est pas un seV car.
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_5$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_5$ mais $\begin{pmatrix} 2+1 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \notin E_5$
puisque $3^2 \neq 5$

E_8 n'est pas un seV car.
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_8$ puisque $2 \times 1 + 3 - 5 = 0$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_8$ car $1 - 1 + 0 = 0$
mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E_8$ puisque $2 \times 2 + 3 \times 1 - 5 \neq 0$
 $2 - 2 + 1 \neq 0$

3). $E_3 \neq \emptyset$ car $(0,0,0) \in E_3$

observons que si $\vec{u} \in E_3$ alors

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad x, z, t \in \mathbb{R}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc si $\vec{v} \in E_3 \exists x', z', t'$ tq $\vec{v} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi
si $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} + \lambda \vec{v} = \overset{\mathbb{R}}{(x + \lambda x')} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\mathbb{R}}{(z + \lambda z')} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\mathbb{R}}{(t + \lambda t')} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3$$

Rem si F et G sont deux s.v. d'un espace vectoriel E

alors $F \cap G \subset E$

$0 \in F$ et $0 \in G$ donc $0 \in F \cap G \neq \emptyset$
vecteur nul

si $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $u + \lambda v \in F$ car F s.v.

$u + \lambda v \in G$ car G s.v.

donc $u + \lambda v \in F \cap G$ $\square$

exos

1) la fonction nulle $0 \in F$ donc $F \neq \emptyset$

si $y_1, y_2 \in F$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & 3(y_1 + \lambda y_2)' + 5(y_1 + \lambda y_2) \\ &= 3(3y_1' + 5y_1) + \lambda(3y_2' + 5y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

F est bien un s.v.

2) G ne contient pas la fonction nulle
car $x \mapsto \cos(x)$ n'est pas identiquement
nulle sur $\mathbb{R}$ (par exemple $\cos(0) = 1 \neq 0$)

exo 16

1) E_1 n'est pas un sev car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne vérifie pas $ax-bx=1$

2) $E_2 \neq \emptyset$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E_2$

si $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in E_2$ $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in E_2$

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 & x_2 + \lambda y_2 \\ x_3 + \lambda y_3 & x_4 + \lambda y_4 \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\text{et } (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2) = x_1 + x_2 + \lambda(y_1 + y_2) \\ = x_4 + y_4$$

est bien un sev.

3) Puisque $\begin{pmatrix} ax & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} ax & c+z \\ b+y & d+t \end{pmatrix}$

ie ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

on vérifie facilement que E_3 est un sev.

exo 17 (succinct)

(3)

1) E_0 n'est pas un sev car $\deg(\text{polynôme}) \neq 0$

2) E_1 est un sev car.

$$(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0)$$

3) E_2 est un sev car.

$$(P + \lambda Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0)$$

si $AIP \Rightarrow R=0$

donc $AIP_1 \Leftrightarrow P_1 = A Q_1$ Q_1 polynôme.

$AIP_2 \Leftrightarrow P_2 = A Q_2$ Q_2 polynôme.

donc $P_1 + \lambda P_2 = A(\underbrace{Q_1 + \lambda Q_2}_{\in \mathbb{R}[X]})$

5) évident puisque $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$

6) déjà fait (en substance) exo 15 Q1

7) non car si $y_1, y_2 \in E_5$

alors $y_1 + y_2$ n'est

$$y_1' + y_2' + a(x)(y_1 + y_2) = \boxed{Zxc}$$

ex 18

1) Il suffit d'utiliser le fait que
 $|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
avec la monotonie / linéarité de l'intégrale

2) il faut utiliser que
 $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
avec la monotonie / linéarité de l'intégrale

3). en utilisant la convexité de $x \mapsto x^p$
 $p \geq 1$ on trouve

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p) \quad (*)$$

et on conclut comme à la Q2.

(*) $\Leftrightarrow$ s'obtient via.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2} \quad \text{car convexité}$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \lambda \in [0, 1])$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{1}{2}.$$