1

correction Séance 9

exemple 0.14

1) L'idée est de comparer q^n à quelque chose de plus simple (dont la limite peut-être déterminée aisément).

2) On utilise l'inégalité de Bernoulli en posant $q = 1+x$.

cette inégalité s'obtient par récurrence sur n ou par convexité. Eventuellement, via le binôme de Newton pour une version affaiblie (avec seulement $x>0$ plutôt que $x>-1$).

3) Il faut s'assurer que $x = q-1 > -1$ puisque $q-1>0$. Ici c'est le cas.

exo23

1) Sachant si $q>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Soit $q' \in]0;1[$, on veut mq $\lim\limits_{n\to+\infty} (q')^n = 0$.

Par cela, on pose $q = \frac{1}{q'}$ ainsi $q>1$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(q')^n} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (q')^n = 0^+$.

2). si mtn $\tilde{q} \in]-1,0[$ on veut mq $\lim\limits_{n\to+\infty} (\tilde{q})^n = 0$.

Par cela, on pose $q = -\tilde{q} \Leftrightarrow \tilde{q} = -q$ ainsi $q \in]0;1[$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. En outre, $\forall n \in \mathbb{N}, (\tilde{q})^n = (-1)^n q^n$

d'où $-q^n \leq (\tilde{q})^n \leq q^n$

et le théorème des gendarmes permet de conclure.

<u>rem</u> Finalement d'une démonstration

si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ on a trouvé ce qui se passait

lorsque $q \in]0;1[$

et $q \in]-1;0[$.

<u>exo24</u>

1) on voudrait ~~prop~~ utiliser un argument de comparaison : $\frac{e^x}{x} >$ qqch qui tend vers $+\infty$.

si on a $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ pour tout $x>0$ c'est gagné.

mtn observons que $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0$

Posons $\phi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ d'où $\phi'(x) = e^x - x$

et $\phi''(x) = e^x - 1 > 0$ si $x>0$

donc ϕ' est croissante ie.

$\phi'(x) \geq \phi'(0) = 1 > 0$ donc ϕ est croissante

ie. $\phi(x) \geq \phi(0) = 1 > 0$ $\forall x>0$

Autrement dit $\forall x>0$ $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$

$\Leftrightarrow e^x > \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ la conclusion s'ensuit.

2) On suggère de mq $\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$ $\forall x>0$

et d'étudier $\phi(x) = e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ sur $\mathbb{R}_+$

3). Sachant $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

~~on pose $y=-x$~~

~~Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{y\to-\infty} \frac{e^{-y}}{-y} = +\infty$~~

~~$\Leftrightarrow \lim\limits_{y\to-\infty} -\frac{1}{ye^y} = +\infty$~~

~~donc $\lim\limits_{y\to-\infty} ye^y =$~~

(3) on pose $X = -x$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = \lim_{X \to +\infty} (-X) e^{-X} = - \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^{X}} = 0$$

on pose $y = \ln(x)$ $\quad x > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^{y}} = 0 .$$

rem à nouveau la limite de $\frac{e^{x}}{x}$ en $+\infty$ a permis de déterminer d'autres résultats après des changements de variables.