① exo20 — correction séances 7 et 8

1) soit $\varepsilon = \frac{\ell'}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$

tq $\forall n \geqslant N \quad |V_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$

$$\Leftrightarrow -\frac{\ell'}{2} \leqslant V_n - \ell' \leqslant \frac{\ell'}{2}$$

donc $\forall n \geqslant N \quad V_n \geqslant \frac{\ell'}{2} > 0$

2) soit $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$

tq $\forall n \geqslant N \quad |U_n - \ell| \leqslant 1$

ainsi, si $n \geqslant N$

$$|U_n| = |U_n - \ell + \ell| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{inégalité}}{\leqslant}} |U_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$

si $0 \leqslant n < N$, forcément

$$|U_n| \leqslant \max_{i=0,\dots,N-1} |U_i| = M'$$

en conclusion, si $M = \max(M', 1+|\ell|)$

nous avons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n| \leqslant M$.

---

exo21 Nous devons mq

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0$

$|U_n + V_n - (\ell + \ell')| \leqslant \varepsilon$.

soit $\varepsilon > 0$ fixé, par hypothèses il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geqslant N_1 \quad |U_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

et $\forall n \geqslant N_2 \quad |V_n - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Posons $N_0 = \max(N_1, N_2)$

si $n \geq N_0$, nous avons

$$|U_n + V_n - \ell - \ell'| = |U_n - \ell + V_n - \ell'|$$

$$\underset{\text{ineq triangulair}}{\leq} |U_n - \ell| + |V_n - \ell'|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

---

exo22 1) supposons, ~~par l'absurde~~, par l'absurde qu'il existe $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ ~~tq~~ $(\ell \neq \ell')$ tq

$\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \ell'$.

cela signifie que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$

tq $\forall n \geq N_1 \quad |U_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

et $\forall n \geq N_2 \quad |U_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

soit $N_0 = \max(N_1, N_2)$ et $n \geq N_0$ nous avons

$$|\ell - \ell'| = |\ell - U_n + U_n - \ell'|$$

$$\underset{\text{ineq triang}}{\leq} |\ell - U_n| + |U_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ceci entraine que $\ell = \ell'$ (choisir par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ $\forall k \geq 1$ et faire $k \to +\infty$)

ce qui est absurde.

---

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |U_n| \leq \frac{\varepsilon}{\Pi}$

si $n \geq \max(N_1, N_2)$ alors

$$|V_n| \leq \Pi |U_n| \leq \Pi \times \frac{\varepsilon}{\Pi} = \varepsilon$$

ie $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = 0$.