

ex 1

1) on pose $j=k-1 \Leftrightarrow k=j+1$

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-2j-2} = e^{-2} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{-2})^j = e^{-2} \left(\frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}} \right)$$

rem $\sum_{j=0}^n e^{-2j} = 1 + \sum_{j=1}^n e^{-2j}$ (on enlève le 1^{er} terme de la somme)

$$\frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}} = 1 + A \quad \text{d'où la valeur de } A.$$

2) on pose $j=k-1 \Leftrightarrow k=j+1$

$$B = \sum_{j=1}^{n-1} j+3 = \sum_{j=1}^{n-1} j + 3 \sum_{j=1}^{n-1} 1$$

linéarité de la somme.

$$= \frac{(n-1)n}{2} + 3 \times (n-1)$$

3) on pose $j=k-1 \Leftrightarrow k=j+1$

$$C = \sum_{j=0}^{n-1} x^{3j+4} = x^4 \sum_{j=0}^{n-1} (x^3)^j = x^4 \times \left(\frac{1-x^{3n}}{1-x} \right)$$

si $x \neq 1$

si $x=1$ $C = \sum_{k=1}^n 1 = n$

(1)

$$4) \sum_{k=1}^{2n+1} 1 = \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=n}^{2n+1} 1$$

on sépare la somme en 2
(les $n-1$ premières termes et les autres)

donc $D = 2n+1 - (n-1) = n+2$

rem on pourrait aussi poser $j=k-n+1$

$$5) \sum_{k=1}^{n^2} k = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=n+1}^{n^2} k$$

$$\text{donc } E = \left(\sum_{k=1}^{n^2} k \right) - \left(\sum_{k=1}^n k \right) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$6) \sum_{k=1}^{2n} k+5 = \sum_{k=1}^{n-1} k+5 + \sum_{k=n}^{2n} k+5$$

②

donc $\sum_{k=n}^{2n} k+S = \sum_{k=1}^{2n} k+S \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k+S$

$$= \sum_{k=1}^{2n} k + S \times \sum_{k=1}^{2n} 1 - \sum_{k=1}^{n-1} k - S \times \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= \frac{2n(2n+1)}{2} + S \times 2n - \frac{(n-1)n}{2} - S(n-1)$$

$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} + S(n+1) = \dots$$

7). on pose $j = k-2 \Leftrightarrow k = j+2$

$$G = \sum_{j=0}^{n-2} 2^{j+3} = 8 \times \sum_{j=0}^{n-2} 2^j$$

$$= 8 \left(\frac{1-2^{n-1}}{1-2} \right)$$

$$= 8(2^{n-1} - 1)$$

exo 2

1) Puisque $x \neq 1$ $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

2) Il s'agit d'une somme finie donc

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^n x^k \right)' = \sum_{k=0}^n (x^k)' = \sum_{k=0}^n k x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^n k x^{k-1}$$

OR $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

donc $\sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

4). $A = \sum_{k=1}^n k 2^{k-1}$ il suffit d'appliquer la question précédente avec $x=2$

③ $B = \sum_{k=1}^n j \times \left(\frac{1}{3}\right)^j$ et d'appliquer ce qui précède avec $x = \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n j \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

5) Idée. $\left(\sum_{k=0}^n x^k \right)' = \left(\sum_{k=1}^n k x^{k-1} \right)$

$$= \sum_{k=2}^n k(k-1) x^{k-2}$$

il faut calculer la dérivée seconde

de $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et choisir la bonne valeur de x ensuite.