

I

ex03 m $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

les deux dernières colonnes coïncident d'où l'égalité.

ex04 m $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

1) sens direct on suppose $A \cap B = A \cup B$ montrons par double inclusion que $A = B$ (i.e. on m $A \subset B$ puis $B \subset A$)

soit $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ or $A \cup B = A \cap B$

donc $x \in A \cap B$ d'où $x \in B$

on a m $A \subset B$.

En échangeant le rôle de A et B, on trouve que $B \subset A$.

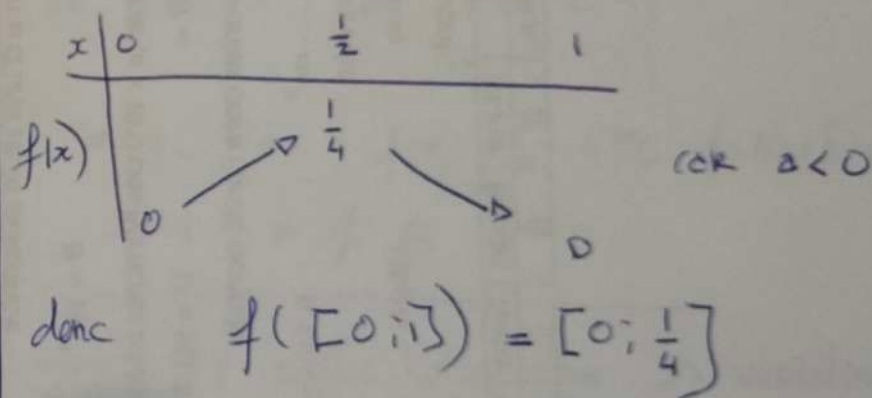
on a établi que $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

2) sens réciproque

on suppose que $A = B$ m $A \cap B = A \cup B$

si $A = B$ alors $A \cap B = A$
et $A \cup B = A$ d'où le résultat.

ex06 Il suffit d'étudier les variations de f sur $[0; 1]$. Ici, f est un polynôme de degré 2 ayant 1 et 0 comme racine donc



donc $f([0; 1]) = [0; \frac{1}{4}]$

ex07

1) démontrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

si $A \cap B$ est vide, le résultat est évident

si $A \cap B \neq \emptyset$ aussi (car $f(\emptyset) = \emptyset$)

mais supposons alors que $A \neq \emptyset$ $B \neq \emptyset$ et $A \cap B \neq \emptyset$

II

soit $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tq $f(x) = y$

puisque $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $f(x) = y$ i.e. $y \in f(A)$
 on a $x \in B$ et $f(x) = y$ donc $y \in f(B)$

Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$ ce qu'il fallait établir.

rem L'inclusion est fautive. En effet si $f(x) = x^2$

$$A = [-2, 1] \text{ alors } f(A) = [1, 4] \text{ mais } A \cap B = \emptyset$$

$$B = [1, 2] \text{ alors } f(B) = [1, 4]$$

$$\text{donc } f(A \cap B) = \emptyset \text{ alors } f(A) \cap f(B) = [1, 4]$$

2) sans perdre en généralité, nous supposons que $A \neq \emptyset$
 (l'égalité étant triviale sinon).

Prevenons par double inclusion

$$1) m) f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

$$\text{soit } y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B \text{ tq } f(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in A \text{ tq } f(x) = y \text{ ou } \exists x \in B \text{ tq } f(x) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B)$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

ii). soit $y \in f(A) \cup f(B)$

$$\Rightarrow \exists x \in A \text{ tq } f(x) = y \text{ ou } \exists x \in B \text{ tq } f(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in A \cup B \text{ tq } f(x) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(A \cup B)$$

rem on voit les implications sont des équivalences ici.

3). La réciproque est fautive.

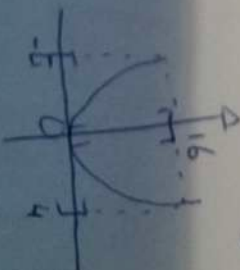
$$\text{si } f(x) = x^2 \text{ et } A = [-2, 1] \text{ et } B = [1, 3]$$

$$\text{on a bien } f(A) = [1, 4] \subset f(B) = [1, 9]$$

$$\text{mais } A \not\subset B.$$

exos I1 suffit d'étudier les variations

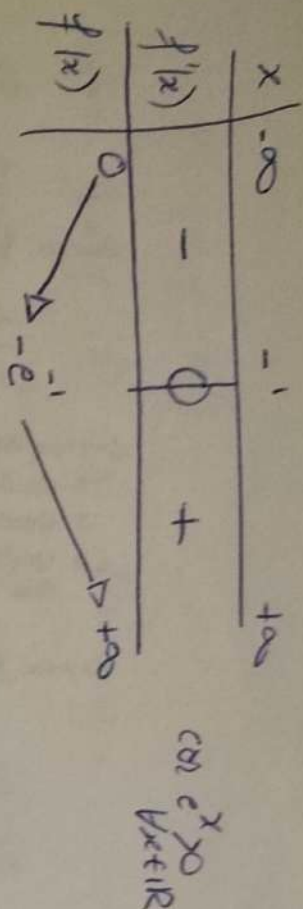
$$1) f'([0, 16]) = [-4, 4]$$



2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } f'(x) = e^x + x e^x = e^x(1+x)$$

III
donc



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.

donc $f^{-1}([-e^{-1}; +\infty[) = [-1; +\infty[$

exos Nous laissons au lecteur le soin de vérifier
à quoi se produit si A ou B sont vides.

1) on suppose $A \subset B$ on a $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

soit $x \in f^{-1}(A) \rightarrow f(x) \in A$

$\Rightarrow f(x) \in B$ car $A \subset B$

donc $x \in f^{-1}(B)$.

La réciproque est fautive. Pour changer construisant un
exemple plus abstrait : $E = \{1, 2\}$ $F = \{a, b\}$.

Soit $f: E \rightarrow F$ tq $f(1) = b$ et $f(2) = b$

si $A = \{1\}$ alors $f^{-1}(A) = \emptyset$
et $B = \{2\}$ alors $f^{-1}(B) = E$

on a bien $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ mais $A \not\subset B$.

2) soit $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A$ et $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

3) même chose avec $\cup$ à la place de $\cap$

NB l'implication réciproque (l'implique pas de $\exists$)
se compare mieux vis à vis des opérations
ensemblistes.

exolo Sans perdre en généralité, A et B
sont supposés non vides.

1) soit $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$

donc $x \in f^{-1}(f(A))$

(puisque $f(x) = y \in f(A)$)

La réciproque est fautive : $f(x) = x^2$
 $A = [0; 1]$ $f(A) = [0; 1]$ mais $f^{-1}([0; 1]) = [-1; 1]$

IV

2) soit $y \in f(f^{-1}(B))$

alors $\exists x \in f^{-1}(B)$ tq $f(x) = y$.

or puisque $x \in f^{-1}(B)$ nous avons $f(x) \in B$

i.e. $y \in B$.

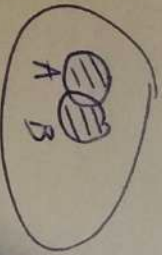
La réciproque est fautive : soit $f(x) = e^x$

si $B = \mathbb{R}^-$ alors $f^{-1}(B) = \emptyset$ donc $f(\emptyset) = \emptyset$
et $B \neq \emptyset$.

exoll

1) Il s'agit des éléments se trouvant exclusivement dans

$A \Delta B$



$$A \Delta B = A \cup B$$

2) $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \in \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup x \in B \text{ et } x \notin A \cup x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \text{ ou } x \notin A \text{ et } x \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B} \text{ ou } x \in \overline{A} \cap B$$

d'où le résultat.

$$3) i) A \Delta A = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap A) = \emptyset$$

$$ii) A \Delta \emptyset = (A \cap \overline{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap A) = A \cup \emptyset = A$$

$$iii) A \Delta E = (A \cap \overline{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap A) = A \cup \emptyset = A$$

$$iv) A \Delta \overline{A} = (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) = A \cup \overline{A} = E$$

4) Laissez à l'attention des lecteurs

(utilisez une table de vérité et QZ).