/

BAC BLANC SPECIALITÉ MATHEMATIQUES - LYCÉE BEAUPRÉ - JANV 20..

Ex 1 ⚠ 5,25

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{U_n+4} \end{cases}$$

0.5 1) On peut conjecturer que $\dfrac{4}{U_n} = n+4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1 2) 0.25 • initialisation : $U_0 = 1$ donc $U_0 > 0$ Vraie au rang 0

0.5 • hérédité. Supposons qu'il existe un rang p pour lequel la propriété soit vraie, c'est à dire

$$U_p > 0$$

donc $4U_p > 0$ et $U_p + 4 > 0$

Ainsi $\dfrac{4U_p}{U_p+4} > 0$ Soit $\boxed{U_{p+1} > 0}$

La propriété est héréditaire

0,25 • ccl : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n > 0$

0.75 3) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{4U_n}{U_n+4} - U_n = \dfrac{4U_n}{U_n+4} - \dfrac{U_n(U_n+4)}{U_n+4} = \dfrac{4U_n - U_n^2 - 4U_n}{4U_n+4} = \dfrac{-U_n^2}{4U_n+4}$

0.5

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad -U_n^2 < 0$ et $4U_n + 4 > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n < 0$ la suite (U_n) est décroissante

0.25

0.5 4) (U_n) est une suite minorée (par 0) et décroissante

↳ Elle est donc convergente

1 5) $v_n = \dfrac{4}{U_n}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{4}{U_{n+1}} - \dfrac{4}{U_n} = \dfrac{4}{\frac{4U_n}{U_n+4}} - \dfrac{4}{U_n} = \dfrac{4\times(U_n+4)}{4U_n} - \dfrac{4}{U_n}$

0.5

$= \dfrac{U_n+4}{U_n} - \dfrac{4}{U_n} = 1 + \dfrac{4}{U_n} - \dfrac{4}{U_n} = 1$

(v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 1$

$v_0 = 4$

$v_0 = \dfrac{4}{U_0} = 4$

0,25

↳ terme général : $v_n = v_0 + n \times r$

soit $\boxed{v_n = 4 + n}$ 0.25

(1) (0,75) 6) $v_n = \frac{4}{u_n}$ donc $u_n = \frac{4}{v_n}$ donc $\boxed{u_n = \frac{4}{4+n}}$ ~~0,25~~

$\lim\limits_{n \to +\infty} 4+n = +\infty$ donc par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ 0.5

7)

```
def seuil A
    u = 1
    n = 0
    while  u >= A
        u = (4*u)\(u+4)
        n = n+1
    return n
```

0,5

pour 0,3 0,25

$n = 10$

car $u_9 = - -$

$u_{10} = - -$

Exercice 2

PARTIE A

$g(x) = 1 - x + e^x$

(0,75) 1) g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -1 + e^x$ 0.25

signe de g' : $-1 + e^x \geqslant 0$

$e^x \geqslant 1$

0.25 $x \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de g'		$-$	0	$+$	
variations de g		↘	2	↗	

0.25

$g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$

(0,25) 2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geqslant 2$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) > 0$

PARTIE B

$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

(1) 1) la limite en $+\infty$ est une FI

↳ On factorise par x

$\forall x > 0$, $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{e^x}\right)$

a) en $-\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

Par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim x + 1 + \frac{x}{e^x} = -\infty$

0,5

ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par le théorème des croissances comparées

donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

③

b) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ Donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

↳ Donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{e^x} = 1$

Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ 0,5

0,5 2) f dérivable

- dérivée de $\frac{x}{e^x}$: (type $\frac{u}{v}$) : $\frac{1\times e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$

- $f'(x) = 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} + \frac{1-x}{e^x} = \frac{1-x+e^x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$ CQFD 0,5

0,25 3) On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) > 0$ (cf question 2 partie A)

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de f'	$+$
variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

0,75 4) Sur $\mathbb{R}$
- f est continue
- f est strictement croissante
- $0 \in]-\infty ; +\infty[$

$\Rightarrow$ D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution 0,5

A l'aide de la calculatrice, on a $f(-0,41) < 0$

$f(-0,4) > 0$

$\alpha \approx -0,4$ 0,25 on obtient $-0,41 < \alpha < -0,40$

1,5 5) équation de la tangente en $x = 0$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

↳ $y = 2x + 1$ 0,5

$f'(0) = \frac{1 - 0 + e^0}{e^0} = 2$

$f(0) = 1 + 0 + \frac{e^0}{e^0} = 1$

b) $f(x)-(2x+1) = x+1+\frac{x}{e^x}-2x-1$

$= -x+\frac{x}{e^x} = \frac{-xe^x+x}{e^x} = \frac{x(1-e^x)}{e^x}$ 0.5

c) Signe de $f(x)-(2x+1)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

$1-e^x>0 \Leftrightarrow 1>e^x \Leftrightarrow 0>x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de x	$-$	0	$+$
signe de e^x	$+$		$+$
signe de $1-e^x$	$+$	0	$-$
signe de "$C_f - T$"	$-$	0	$-$
Position Relative	C_f est en dessous de T		

0.5

Ex 3

0.5 1) $f(1)=4$ 0.25 et $f'(1)=0$ 0.25 (tangente horizontale)

0.5 2) $f(e)\simeq 2,9$ 0.25 $f'(e)\simeq -\frac{1}{2}$ 0.25 (lecture graphique du coef directeur de la tangente)

$f(x)=\frac{4+4\ln(x)}{x}$

1 3) en $+\infty$ $f(x)=\frac{4}{x}+4\times\frac{\ln x}{x}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (croissances comparées

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 0.5

en 0 : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}(4+4\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+} x=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ 0.5

0,5 4) $\underline{f'(x)}$ $\quad$ f dérivable sur $]0;+\infty[$

$$f = \frac{u}{v} \quad \text{avec} \quad u = 4+4\ln x \quad u' = \frac{4}{x}$$
$$v = x \quad v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{4}{x}\times x - (4+4\ln x)}{x^2} = \frac{4-4-4\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^2}$$

0,75 5) $\forall x \in]0;+\infty[\quad x^2 > 0$

$-4\ln x > 0 \iff \ln x < 0 \iff x < 1$ 0,25

x	0		1		$+\infty$
signe de f'	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$$f(1) = \frac{4+4\ln 1}{1} = 4$$ 0,25

0,25

0,5 6) f' dérivable sur $]0;+\infty[$

$$f' = \frac{u}{v} \quad \text{avec} \quad u = -4\ln x \quad u' = -\frac{4}{x}$$
$$v = x^2 \quad v' = 2x$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{4}{x}\times x^2 - 2x\times(-4\ln x)}{(x^2)^2} = \frac{-4x+8x\ln x}{x^4} = \frac{-4+8\ln x}{x^3}$$

1,5 7) $\underline{\text{signe de } f''}$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[\quad x^3 > 0$

$$-4+8\ln x > 0 \iff 8\ln x > 4 \iff \ln x > \frac{1}{2}$$
$$\iff x > e^{\frac{1}{2}}$$ 0,5

- sur $]0;e^{\frac{1}{2}}[$: $f'' < 0$ donc f est CONCAVE
- sur $]e^{\frac{1}{2}};+\infty[$ $f'' > 0$ donc f est CONVEXE

0,5

$$f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{4+4\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{4+4\times\frac{1}{2}\ln e}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{4+2}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{e^{\frac{1}{2}}} = 6\times e^{-\frac{1}{2}}$$ 0,25

- Point d'inflexion en $(e^{\frac{1}{2}}; 6e^{-\frac{1}{2}})$

Ex4 QCM

Question 1

a) $[4;5]$ b) $y=0$ c) $2{,}5$

Question 2

a) BMN est isocèle et rectangle

b) G

c) $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

Question 3

a) $M_2\,(11;-9;-22)$ $(t=5)$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $A \in d'$ $(B \in d')$

$\Rightarrow$ d et d' sont confondues

d) le point cherché appartient à $(O;\vec{i};\vec{j})$ donc $z=0$

donc $t = \frac{1}{3}$ et $x = 0$
$y = 2$

$M\,(0;2;0)$