Chapitre 1 - Suites (partie 1)

Déterminer les termes d'une suite

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 3$. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

Exercice 2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n - 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Déterminer v_1, v_2 ; à l'aide de la calculatrice déterminer v_{10}.

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 3. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier termer $u_0 = 5$ et de raison 2.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Ecrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

Exercice 4. Laquelle de ces formules de récurrence est liée à une suite arithmétique (v_n) ? Préciser la valeur de la raison.

$\mathbf{a.}\left\{\begin{array}{c} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = 3 - v_n \end{array}\right.$ $\mathbf{b.}\left\{\begin{array}{l} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = v_n + 2n \end{array}\right.$ $\mathbf{c.}\left\{\begin{array}{l} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 7 \end{array}\right.$ $\mathbf{d.}\left\{\begin{array}{l} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3. \end{array}\right.$

Exercice 5. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,200$ et de raison $q = 1.5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Donner une relation entre u_{n+1} et u_n.
3. Avec la calculatrice, déterminer la valeur du onzième terme de la suite (u_n).

Exercice 6. Le salaire d'embauche annuel d'un employé est de $25\,600$ euros. Son contrat prévoit une augmentation annuelle de 2%. Posons $u_0 = 25\,600$ et désignons, pour tout entier n, par u_n le salaire annuel (en euros) au bout de n années.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) et préciser la valeur du paramètre associé.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer le salaire annuel au bout de 8 ans d'un employé.

Exercice 7.

1. Considérons la suite des multiples positifs de $4 : 0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; \ldots$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons u_n le $n+1$ ième multiple de 4. Ainsi $u_0 = 0$ correspond au 1er multiple de la liste. Exprimer u_n en fonction de n . Quelle est la nature de cette suite ?

2. Chaque année, une salle de sport perd la moitié de ses clients et en gagne 50 nouveaux. En 2020, elle comptait 200 clients. Notons u_n le nombre de clients en $2020 + n$. Calculer u_1 puis interpréter le résultat obtenu. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 8. Soit (u_n) une suite géométrique. Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n.

1. la raison est $q = -2$ et le premier terme est $u_1 = -1$.
2. $u_3 = 1$ et $u_7 = 4$.

Exercice 9. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -1$.

1. Exprimer u_n en fonction de n
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Exercice 10. Soit (u_n) une suite arithmétique. Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n.

1. la raison est $r = \sqrt{2}$ et le premier terme est $u_1 = -1$.
2. $u_3 = 1$ et $u_7 = -2$.

Exercice 11. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = -2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Etude de variations

Exercice 12. Dans chacun des cas suivants, à l'aide de la calculatrice, conjecturez puis étudier le sens de variations des suites :

$\mathbf{a.}\left\{\begin{array}{l} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}n + 1 \end{array}\right.$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{b.}\, v_n = n^2 - n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\mathbf{c.}\left\{\begin{array}{l} w_0 = 1 \\ w_n = w_{n-1} - \frac{1}{n} \end{array}\right.$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbf{d.}\, u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{e.}\, u_n = (-3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et $\mathbf{f.}\, u_n = 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque. Les plus rapides pourront traiter les cas suivants :

$$\mathbf{g}.\ u_n = \frac{n-2}{2n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad \mathbf{g}. \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 5 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \mathbf{i}.\ u_n = \frac{1.5^n}{n+1} \quad \forall n \geq 0.$$

et

$$\mathbf{j}.\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \forall n \geq 1 \quad \mathbf{k}.\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Majorants et minorants

Exercice 13. 1. Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{2+\cos(n)}$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3-n}{2+n}$ est minorée par -1 et majorée par $\frac{3}{2}$.

Algorithmes

Exercice 14. Parmi les algorithmes suivant, reconnaitre ceux qui affichent des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique. Expliquer votre raisonnement.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3	Algorithme 4
U ← −2	U ← 1,5	U ← 10	U ← −3
Pour *i* allant de 1 à 10	Pour *i* allant de 1 à 6	Pour *i* allant de 1 à 12	Pour *i* allant de 1 à 100
| U ← −10 + U	| U ← U²	| U ← U/4	| U ← 5 − U
| Afficher U	| Afficher U	| Afficher U	| Afficher U
Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour

Suites arithmético-géométriques

Exercice 15. Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

er posons $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $\epsilon_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Donner une expression de S_n et de ϵ_n en fonction de n.

Exercice 16. Considèrons la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n^2} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous admettrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Posons alors $v_n = u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Exprimer alors v_n en fonction de n. En déduire ensuite l'expression de u_n en fonction de n.

Exercices plus élaborés

Exercice 17. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 1} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer l'évolution (sens de variation, limite éventuelle) de la suite (u_n).
2. Démontrer que la suite (v_n) , définie par $v_n = u_n^2 - \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 18. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Posons $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont la raison et le premier terme seront à préciser.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.