Chapitre 12

Géométrie spatiale (partie 2)

En classe de première vous avez étudié la notion d'orthogonalité de vecteurs du plan. Cette notion s'avérait utile pour établir que des droites étaient perpendiculaires, pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir d'un vecteur normal et pour déterminer des équations cartésiennes de cercles. Il semble alors naturel de s'interroger sur l'extension de cette notion dans l'espace.

12.1 Produit scalaire dans l'espace

Avant d'énoncer une définition, rappelons qu'il est possible de déterminer la norme de n'importe quel vecteur de l'espace : si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de l'espace, nous noterons sa norme $\|\overrightarrow{u}\|$ et

$$\|\overrightarrow{u}\| = OM$$

où M est l'unique point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

Définition 12.1.1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Nous définissons le produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]. \tag{12.1.1}$$

Remarque.

1. Nous adopterons la notation suivante $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$ et nous avertissons le lecteur que cette quantité est un nombre réel (la norme de $\overrightarrow{u}$), pas un vecteur.
2. D'une certaine manière, la formule (12.1.1) mesure le défaut d'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. En effet, le membre de droite peut se réécrire (en introduisant des points A, B et C et en multipliant par 2) sous la forme

   $$BC^2 - AB^2 - AC^2$$

   qui fait songer aux quantités impliquées dans le théorème de Pythagore. Les cours des années passées, nous assurent alors que cette quantité veut zéro dès lors que $\widehat{BAC}$ est un angle droit.
3. Cette formule est rarement utilisée dans les exercices.

La notion d'orthogonalité, étudiée en classe de première, s'étend à l'espace.

Définition 12.1.2 (Orthogonalité)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Nous dirons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Remarque. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

Il se trouve que la formule (12.1.1) est loin d'être pratique et qu'il est souhaitable de se ramener à des formulations plus commodes. Montrons ce qui se produit lorsque nous introduisons un repère de l'espace.

12.2 Produit scalaire et coordonnées

En classe de première, vous aviez constaté que l'utilisation de coordonnées permettait d'avoir une nouvelle façon, plus simple encore, de calculer un produit scalaire. Ceci nécessite une nouvelle définition.

Définition 12.2.1 (Base et repère orthonormé)**.** *Une base* $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ *de l'espace est orthonormée si*

- *les vecteurs* $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{k}$ *sont deux à deux orthogonaux.*
- *les vecteurs sont unitaires :*
$$\|\overrightarrow{i}\| = 1 \quad ; \quad \|\overrightarrow{j}\| = 1 \quad ; \quad \|\overrightarrow{k}\| = 1.$$

Un repère $(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ *est orthonormé si la base* $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ *est orthonormée.*

Comme nous l'avons déjà vu, l'introduction d'une base ou d'un repère permet d'exprimer un vecteur à l'aide de coordonnées. Ceci nous fournit le résultat suivant.

Proposition 69 (Expression du produit scalaire avec des coordonnées)**.** *Soient* $(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ *un repère de l'espace. Considérons les vecteurs* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. *Alors*

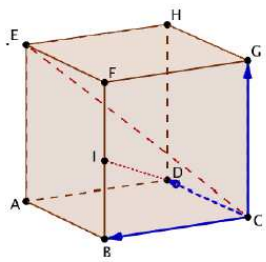
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

En particulier, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$
$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Proposition 70. *La démonstration est élémentaire : il suffit de développer le produit scalaire*
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k})$$
en utilisant le fait que $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ *est une base orthonormé de l'espace.*

Voyons à présent un exemple.

Exemple 12.2.1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.



Considérons alors le repère $(C;\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CG})$. Dans ce repère, nous avons
$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 0.5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DI} = 1\times 1 + 1\times(-1) + 1.5 = 0.5 \neq 0$. En conclusion, les vecteur $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercices à traiter : 1 page 311, 20 page 317 et 24 page 318. Exercices d'entrainement 26, 28 et 29page 318 ; Méthodes 1 page 311.

Comme cela a été observé en classe de 1ère, le produit scalaire possède de nombreuses propriétés algébriques.[1]

Proposition 71 (Propriétés algébriques du produit scalaire)**.** *Soient* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *des vecteurs de l'espace.*

1. *(Symétrie)* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
2. *(Bilinéarité)* $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
3. *(Bilinéarité)* $\overrightarrow{k \times u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{k \times v} = k \times \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ *pour tout* $k \in \mathbb{R}$.

1. Lesquelles peuvent être obtenues, seulement à partir de la formule 12.1.1, sans passer par des coordonnées.

Remarque. En utilisant le fait que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$, nous laissons le soin au lecteur de vérifier que les identités remarquables suivantes sont satisfaites :

$$\|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \pm 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2.$$

Pour cela, il suffira de développer le produit scalaire $\|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.

Ces propriétés sont particulièrement utiles lorsque la relation de Chasles est utilisée. Ceci est notamment visible lorsque nous utilisons une autre formulation du produit scalaire, impliquant cette fois-ci un projeté orthogonal.

12.3 Produit scalaire et angles orientés

Etant donné deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace, l'idée est d'observer qu'il existe toujours un plan $\mathcal{P}$ qui contient les contenant, nous pouvons alors reprendre les formules de la classe de première.

Proposition 72 (Produit scalaire et projeté orthogonal)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace alors*

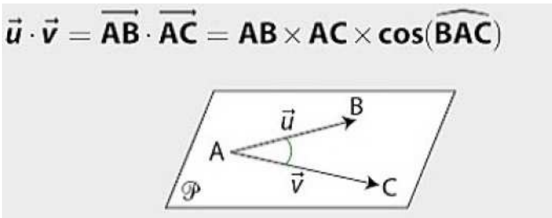
- *(produit scalaire et angle orienté) :*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left((\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})\right)$$

où $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ est l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

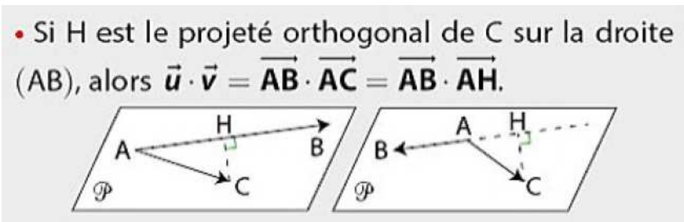
En particulier, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$



- *(produit scalaire et projeté orthogonal) : si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposé.} \end{cases}$$



Remarque. Nous avons maintenant deux manières différentes de calculer un produit scalaire. Ces deux points de vues permettent alors de déterminer un angle orienté entre deux vecteurs. Nous rappelons ci-dessous le raisonnement vu en classe de première sur un exemple simple. Soient $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'une part, nous avons

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 = 1.$$

D'autres part,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\left((\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})\right).$$

Or, nous avons aussi (après quelques calculs) : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 1$. Nous en déduisons donc que

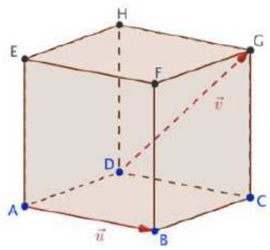
$$1 = \sqrt{2} \times \cos\left((\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\left((\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π.

Exercice à traiter : 3 et 4 page 311. Exercice d'entrainement : 30 page 318 , cf. Méthode 2 page 311

Voyons maintenant comment employer la formule impliquant le produit scalaire.

Exemple 12.3.1. Soit $ABCDEFHG$ un cube de côté a



1. Déterminons $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$. Nous avons
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$$
puisque $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$. D'où, après un projeté orthogonal, nous en déduisons que
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB \times AB = a^2.$$
2. Déterminons maintenant $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AG}$. Nous avons
$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BF}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}) = \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BG}$$
où, dans le première égalité nous avons utilisé la relation de Chasles et, dans la deuxième égalité, les propriétés algébriques du produit scalaire. Enfin, puisque (BF) et (AB) sont perpendiculaires et que F est le projeté orthogonal de G sur (BF), nous avons
$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BG} = 0 + BF^2 = a^2$$

Remarque. L'utilisation de la relation de Chasles combinée aux propriétés algébriques et aux projetés orthogonaux permet souvent de simplifier le calcul d'un produit scalaire.

Exercice à traiter : 2 page 311 et 22 page 318 ; Exercice d'entrainement : 31 et 32 page 318/319.

12.4 Plans de l'espace et orthogonalité

Vous avez déjà rencontré la notion de vecteur normal (à une droite) en classe de première, celle-ci se généralise à l'espace.

Définition 12.4.1. *Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan. Nous dirons que $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{n}$ est le vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.*

Voyons deux conséquences de ceci.

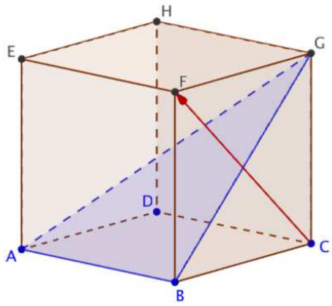
Proposition 73. *Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan.*

1. *$\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.*[2]
2. *Soit A est un point de l'espace.*
   (a) *L'ensemble des points M de l'espace tels que*
   $$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \tag{12.4.1}$$
   est un plan contenant A.
   (b) *De plus, l'équation (12.4.1) caractérise un plan : pour tout point $A \in \mathcal{P}$ et tout vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à $\mathcal{P}$ alors l'ensemble des points M vérifiant (12.4.1) est précisément le plan $\mathcal{P}$.*

2. Autrement dit $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à une direction de $\mathcal{P}$.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 12.4.1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.



Démontrons que $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG). Pour cela, introduisons le repère $(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BF})$. Dans ce repère nous avons les coordonnées suivantes :

$$A(1;0;0), \quad B(0;0;0), \quad C(0;1;0), \quad F(0;0;1) \quad \text{et} \quad G(0;1;1).$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En conséquence, $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times (-1) - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$. Autrement dit, $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABG), il s'agit donc d'un vecteur normal de ce même plan.

La notion de vecteur normal est très commode car elle permet d'obtenir simplement des équations cartésiennes de plans à partir de la formule (12.4.1).

12.4.1 Equation cartésienne de plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$.

Définition 12.4.2. *Soit $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. L'équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ est de la forme*

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{12.4.2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que a, b et c ne sont pas simultanément nuls. Ainsi, $M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si les coordonnées du point M vérifie l'équation (12.4.2).

La question est maintenant de savoir, étant donné un plan $\mathcal{P}$, comment trouver les coefficients a, b, c, d intervenant dans l'équation cartésienne (12.4.2).

Proposition 74 (Equation cartésienne d'un plan)**.** *Soient $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan. Si*

- $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *est un vecteur normal à $\mathcal{P}$,*
- *si $A(x_A; y_B; z_C) \in \mathcal{P}$*

alors $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne

$$\mathcal{P} : \quad ax + by + cz + d = 0$$

où $d \in \mathbb{R}$ se détermine à partir des coordonnées du point A.

Démonstration. L'idée est d'utiliser la caractérisation (12.4.1). En effet, nous avons

$$M(x;y;z) \in \mathcal{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$

Autrement dit,

$$(x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax + by + cz + (-ax_A \times -by_A - cz_A) = 0.$$

Il suffit alors de choisir $d = -ax_A \times -by_A - cz_A$ pour obtenir une équation cartésienne du plan de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

□

Remarque. En fait, il est possible d'en dire un peu plus : si $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme

$$ax + bz + cz + d = 0$$

alors $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. En effet, puisque a, b et c ne sont pas tous nuls, nous pouvons supposer que $a \neq 0$. Nous pouvons alors vérifier que le point $A(\frac{-d}{a}; 0; 0)$ vérifie (12.4.2). Si $M(x;y;z) \in \mathcal{P}$ (en particulier, ceci nous assure que $ax + by + cz + d = 0$), nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} &= (x - x_A)a + (y - y_1)b + (z - z_C) \\ &= ax + by + cz + d = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, $\overrightarrow{n}$ est bien un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Voyons ce résultat en application sur des exemples.

Exemple 12.4.2.
1. Le plan d'équation cartésienne $\mathcal{P} : x - y + 5z + 1 = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Si nous souhaitons trouver les coordonnées d'un point de ce plan, il suffit de choisir des valeurs de x, y, z vérifiant l'équation $x - y + 5z + 1 = 0$. Par exemple, si $x = y = 1$ alors $M(1; 1 - \frac{1}{5}) \in \mathcal{P}$
2. Déterminons l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point $A(-1; 2; 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'après la proposition 74, nous savons que l'équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$ est de la forme

$$3x - 3y + z + d = 0$$

avec $d \in \mathbb{R}$ à déterminer. En outre, puisque $A \in \mathcal{P}_1$, nous avons

$$3x_A - 3y_A + z_A + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3 - 6 + 1 + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d = 8.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ admet pour équation cartésienne

$$3x - 3y + z + 8 = 0$$

Remarque. Dans le deuxième exemple, nous aurions pu aussi calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$ avec $M(x;y;z) \in \mathcal{P}_1$ pour obtenir l'équation du plan (puisque, d'après la caractérisation (12.4.1), $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$).

Exercices à traiter : 5-6 page 313 puis 38 à 43 page 319 ; Méthode 3 page 313.

Voici une ressource supplémentaire : `https://youtu.be/IDBEI6thBPU`

Nous pouvons à présent achever notre étude de position relative entre des plans et des droites.

12.5 Orthogonalité de droites et de plans

Le produit scalaire est précisément là pour résoudre des problèmes d'orthogonalité dans l'espace. Débutons par le cas le plus simple.

12.5.1 Cas de deux droites

Proposition 75. *Soient f une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$ et d' une droite dirigée par $\overrightarrow{v}$. d est orthogonale à d' lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.*

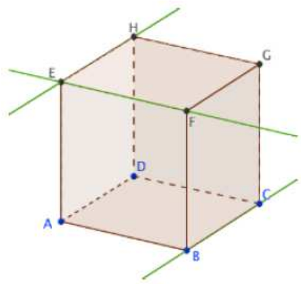
Remarque. Il est important de noter une subtilité de langage (propre à la géométrie dans l'espace, ceci n'a pas lieu d'être dans le plan) : des droites peuvent êtres orthogonales sans être perpendiculaires. Cela se produit lorsque les droites ne sont ni coplanaires ni sécantes. En revanche, nous avons bien :

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

Ainsi, pour être perpendiculaires, des droites doivent être dans le même plan.

Voyons sur un exemple.

Exemple 12.5.1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.



Alors

- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires (elles sont coplanaires, sécantes et leurs vecteurs directeurs orthogonaux).
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales (elles sont ni coplanaires, ni sécantes mais leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux).

Exercices à traiter : 25 page 318.

Voici quelques ressources supplémentaires
https://youtu.be/qKWghhaQJUs et https://youtu.be/80bh6cIZeEw.

12.5.2 Cas d'une droite et d'un plan

Voyons à présent ce qui peut se produire lorsque nous avons un plan et une droite.

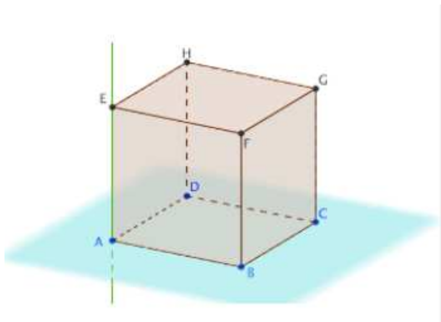
Proposition 76. *Soient d une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *d est orthogonale à $\mathcal{P}$,*
2. *le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.*

Remarque. Si une droite d est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ alors elle est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 12.5.2. Soit $ABCDEFGH$ un cube.



Alors, nous avons :

- (AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB). Autrement dit, $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal aux vecteurx $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, ils définissent donc une direction du plan (ABC).

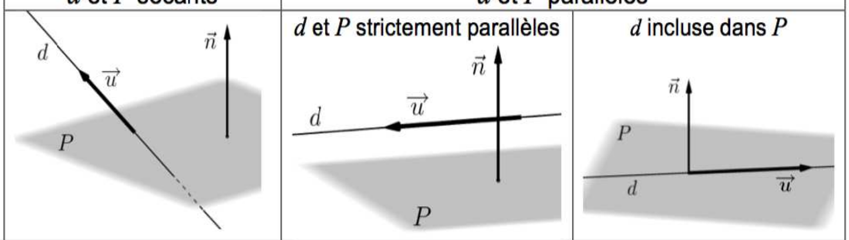
En conclusion, la droite (AE) est orthogonale au plan (ABC).

Voyons maintenant ce qu'il est possible de dire à l'aide du vecteur normal quant à la position relative d'une droite et d'un plan.

Proposition 77 (Position relative d'un plan et d'une droite)**.** *Soient $\mathcal{P}$ un plan et d une droite de l'espace. Alors*

1. *$\mathcal{P}$ et d sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan.*
2. *d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ si et seulement si d est parallèle à $\mathcal{P}$ et s'ils admettent un point commun.*
3. *d et $\mathcal{P}$ sont sécants si et seulement si ils ne sont pas parallèles (i.e. si un vecteur directeur de la droite n'est pas orthogonal à un vecteur normal du plan).*
4. *d et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux si et seulement si un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan sont colinéaires.*

Graphiquement nous avons :

Positions relatives - Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ - Plan P de vecteur normal $\vec{n}$	d et P sécants	d et P parallèles	
		d et P strictement parallèles	d incluse dans P
			
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$	$\vec{u}.\vec{n} = 0$	

Voyons cela en application.

Exemple 12.5.3. Considérons la droite d de représentation paramétrique :

$$d := \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $3x - y + 2z - 3 = 0$. De ceci, nous en tirons que $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. En outre, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = -8 \neq 0$. Autrement dit d et $\mathcal{P}$ sont sécants. Soit $K(x; y, z)$ le point d'intersection, ces coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4t \\ z = -2 + t \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

La substitution des valeurs de x, y et z dans la dernière ligne donne la valeur $t = -0.5$, ce qui permet de trouver ensuite $K(2; -2; -2.5)$ en remplaçant ce nombre dans les trois premières lignes afin d'obtenir la valeur de x, y et z.

Exercices à traiter : 11 et 12 page 315 (cf. méthode 6 page 315). Exercices d'entrainements : 52 à 55 page 320/321.

Voici une ressource supplémentaire https://youtu.be/BYBMauyizhE

12.5.3 Cas de deux plans

Passons aux cas de deux plans.

Définition 12.5.1. *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans. Nous dirons que deux plans sont perpendiculaires lorsque les vecteurs composant la direction de l'un sont tous les deux orthogonaux aux vecteurs composant une direction de l'autre.*

Ceci fournit alors le résultat suivant.

Proposition 78. *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans. Nous dirons que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.*

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 12.5.4. Dans un repère orthonormé, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont pour équations respectives :

$$2x + 4y + 4z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - 5y + 4z - 1 = 0.$$

Démontrons que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires. Pour cela, il suffit de calculer le produit scalaire entre deux vecteurs normal. Ici, $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}'$. D'où,

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}' = 2 \times 2 + 4 \times (-5) + 4 \times 4 = 0.$$

Les plans sont bien perpendiculaires.

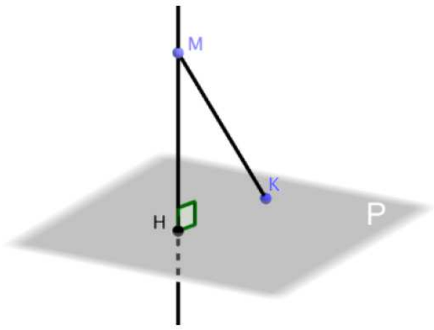
Exercices à traiter : 14 page 315 et 56 page 321. Exercices d'entrainements : 57 et 58 page 321.

Pour conclure ce chapitre, nous pouvons maintenant aborder la notion de projeté orthogonal sur un plan. Ceci permettra d'ailleurs de déterminer la distance d'un point à un plan.

12.6 Projeté orthogonal

Etant donné un plan $\mathcal{P}$ (resp une droite d) ainsi qu'un point A ne se trouvant pas dans $\mathcal{P}$ (resp. dans d), il est possible de se demander quel est le point du plan (resp. de la droite) le plus proche de A ? Pour répondre à cette question, il convient d'utiliser la notion de projeté orthogonal.

Définition 12.6.1. *Le projeté orthogonal d'un point sur un plan (ou une droite) est le point d'intersection du plan (ou de la droite) et de la perpendiculaire à ce plan (ou cette droite) passant par le point donné.*



Comme cela peut s'observer sur la figure ci-dessous, nous avons de plus le résultat suivant qui montre que le projeté orthogonal minimise les distances.

Proposition 79. *Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point $H \in \mathcal{P}$ le plus proche de M. La distance d'un point M à un plan $\mathcal{P}$ correspond alors à la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{P}$ un plan et $M \notin \mathcal{P}$ un point. Notons H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$. Soit $K \in \mathcal{P}$. Nous avons alors

$$MK^2 = \|\overrightarrow{MK}\|^2 = \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK}\|^2$$

d'après la relation de Chasles. Or, grâce aux propriétés algébriques du produit scalaire, nous avons

$$\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK}\|^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK}) \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK}) = MH^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HK} + HK^2 = MH^2 + HK^2$$

puisque, par hypothèse (liée à la projection orthogonale), $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont orthogonaux. En résumé, nous avons

$$MK^2 = MH^2 + HK^2 \geqslant MH^2$$

puisque $HK^2 \geqslant 0$. D'où,

$$MK \geqslant MH.$$

Ainsi, le point H est bien celui qui minimise la distance entre M et le plan ; le cas d'égalité étant atteint lorsque $K = M$. □

Voyons ceci sur un exemple.

Exemple 12.6.1. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation

$$\mathcal{P} \,:\, x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

Ainsi $\setminus = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit maintenant $A(2;1;3) \notin \mathcal{P}$ et déterminons les coordonnées de H, le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. A cet effet, nous considérons la droite d passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n}$. Celle-ci admet la représentation paramétrique suivante

$$d := \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$, un paramètre. Par construction, cette droite est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. Déterminons alors les coordonnées du point d'intersection (celles correspondront alors à celles du point H). Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3 + 2t \\ x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de remplacer x, y et z dans la dernière ligne afin de trouver la valeur de t. Ceci mène à

$$(2+t) - 3(1-3t) + 2(3+2t) - 1 = 0 \quad \iff \quad t = \frac{-2}{7}.$$

D'où en substituant cette valeur dans les expressions de x, y et z nous en déduisons que $H(\frac{12}{7}; \frac{13}{7}; \frac{17}{7})$. Ceci nous permet alors de déterminer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$. Pour cela, il suffit de calculer

$$AH = \sqrt{(2-\frac{12}{7})^2 + (1-\frac{13}{7})^2 + (3-\frac{17}{7})^2} = \ldots = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$

Exercices à traiter : 7 et 8 page 313. Exercices d'entrainement : 44 à 48 page 319/320 ; cf. Méthode 4 page 313 et Méthode 5 page 314.

Voici quelques ressources supplémentaires : https://youtu.be/RoacryS1UAU et https://youtu.be/1b9FtX4sCmQ.

Pour clore ce chapitre, nous énonçons quelques questions pouvant faire office de pistes de réflexions :

- Nous avons parlé de droites et de plan, il se trouve que lecteur a aussi rencontré des cercles en classe de $1^{\text{ère}}$. Comment-pourrions nous définir une représentation paramétrique d'un cercle ?
- En généralisant, quel est l'analogue d'un cercle dans l'espace ? Quelle pourrait-être l'équation cartésienne d'un tel objet (centré en O et de rayon 1) dans l'espace ? En s'inspirant du point précédent, quelle pourrait-être une représentation paramétrique d'un tel objet ? Par analogie avec le cas d'un plan, en déduire la dimension de ce nouvel objet.
- Quelle pourrait-être l'équation cartésienne d'un ballon de rubgy ?

12.7 Pour aller plus loin

Voici quelques mots permettant d'exploiter plus encore la notion d'orthogonalité.

12.7.1 Orthogonalité et variables aléatoires

En prenant du recul sur ce que nous venons d'étudier dans l'espace, nous constatons que la notion d'orthogonalité et ses propriétés découlent de l'utilisation d'une fonction $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \mapsto \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Cette fonction est symétrique : pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, nous avons
$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle.$$
2. Elle est définie positive : pour tout $\overrightarrow{u}$, nous avons
$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \quad \iff \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \geqslant 0.$$
3. Elle est bilinéaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}$, nous avons
$$\langle \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle.$$

Il se trouve que ce genre de fonctions peut être obtenu dans un cadre probabiliste en utilisant des variables aléatoires. En effet, considérons deux variables aléatoires X et Y centrées (i.e. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$) dont la variance est finie. Nous définissons alors la fonction suivante :

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY].$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que cette fonction vérifie les mêmes propriétés que le produit scalaire (en remplaçant les vecteurs par des variables aléatoires). Ceci mène alors à la définition suivante (analogue de l'orthogonalité pour les vecteurs)

Définition 12.7.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires centrées dont la variance est finie. Nous dirons que X et Y ne sont pas corrélées lorsque $\mathbb{E}[XY] = 0$.*

Remarque. Lorsque X et Y sont indépendantes (et centrées) nous avons $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$. La notion de corrélation est donc plus faible que la notion d'indépendance. Il s'agit précisément de l'argument qui va nous permettre, dans un chapitre ultérieur de démontrer (sous des hypothèses d'indépendance) la formule suivante : pour toutes familles de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ deux à deux indépendantes[3] nous avons alors

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n)$$

12.7.2 Orthogonalité dans un espace de fonctions

Il est possible, en utilisant la notion d'intégrale de définir un produit scalaire entre deux fonctions. Nous verrons ceci lorsque le chapitre de calcul intégral sera traité. Présentons tout de même une application de cela, en lien avec le projeté orthogonal, expliquant de quelle manière obtenir un $mp3$ à partir d'un morceau de musique sous format analogique.

Il se trouve que l'humain n'est capable d'entendre toutes les fréquences sonores, celles trop hautes ou trop basses lui échappent. Pourtant, lorsqu'un morceau de musique est enregistré, il contient ses fréquences (lesquelles contribuent alors au poids du fichier contenant le morceau). Il parait alors naturel de décomposer l'espace en deux « axes » : l'une pour les fréquences que l'être humain perçoit et l'autre pour celles qui sont inaudibles. Il semble alors raisonnable, pour gagner de la place, de chercher à enlever du morceau enregistré la partie inaudibles. Cela revient à effectuer une projection orthogonale de notre morceau (ici assimilé à un vecteur) sur l'axe des fréquences audibles.

Tout ceci se passe comme dans l'espace, il se trouve juste que les objets mis en jeu sont légèrement plus complexes (il s'agit de fonctions et d'intégrales) et que l'espace sous-jacent est de dimension infinie cette fois-ci mais l'abstraction des mathématiciens leur a permis de traiter ceci aussi simplement que le dernier exemple traité en classe.

3. l'hypothèse deux à deux non corrélées suffirait pour aboutir à la même conclusion.