Exploration de différents thèmes : retenir les idées et les outils

L'année prochaine, lorsque vous aurez à travailler des démonstrations de cours, il parait essentiel de retenir les idées principales de la démonstration et d'être capable des les exploiter le plus possible afin de limiter la quantité de choses à retenir par cœur. Vous l'avez déjà fait cette année.

Exemple 0.13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Sans réfléchir vous savez déjà qu'il faut :

- Etudier le domaine de définition.
- Dériver la fonction et étudier le signe de $f'(x)$.
- En déduire les variations et déterminer les limites au bord du domaine de définition.

Vous faites tout cela naturellement sans y penser et vous savez adapter les arguments techniques employés :

- utilisation des formules adéquates pour calculer $f'(x)$,
- utilisation des outils nécessaires pour déterminer son signe (factoriser en général, utiliser Δ, résoudre une inéquation trigonométrique ou exponentielle ou logarithme,...).

Il convient alors de ranger ce qui précède dans deux endroits différents :

- **idée** : pour étudier les variations de f, j'utilise la dérivée f'
- **technique** : pour le signe de $f'(x)$ j'utilise la méthode adaptée à la situation.

C'est un peu cette manière de faire qui vous permettra de vous économiser l'année prochaine.

Exemple 0.14. Voyons comment étudier les limites de q^n lorsque $q > 1$ et $n \to +\infty$.

D'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout $x > -1$, nous avons

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

En particulier, si $x = q - 1$ nous avons $q^n \geq 1 + (q-1)n$ et le résultat s'ensuit par comparaison.

Voici quelques interrogations à avoir en tête :

1. Quelle est l'idée utilisée ?
2. Quel est l'outil utilisé ? Comment s'obtient-il ? [4]
3. Y a-t-il des vérifications implicites à effectuer dans la démonstration proposée ci-dessus ?

Il est important de savoir recycler les démonstrations pour limiter le nombre de chose à retenir.

Exercice 23. 1. Comment obtenir à partir de ce qui précède la limite suivante $\lim_{n\to+\infty} q^n$ lorsque $0 < q < 1$.

4. Réfléchir à plusieurs manières, proposées en terminale, d'obtenir cette inégalité (ou éventuellement une forme affaiblie).

2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} q^n$ lorsque $-1 < q < 0$.

Dans le même esprit.

Exercice 24. 1. Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Quelle est l'idée à utiliser ? Avec quel outil ?

2. Si $n \in \mathbb{N}_*$, comment faire pour démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$?

3. A l'aide de la question 1, démontrer que $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.