1

Séance 10

Thm Accroissement finis

L'idée était de construire une fonction H tq $H(a) = H(b)$ pour applique le thm de Rolle en s'assurant que $H'(c) = 0$ corresponde exactement à l'égalité que nous voulions obtenir.

exo28 Il faut suivre l'idée de la démonstration précédente.

i.e construire $x \mapsto H(x)$ de sorte que $H'(c)$ correspond à l'egalité voulue

et $H(a) = H(b)$.

Ici Il semble fructeux de considerer.

$$H(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{A}{2}(b-x)^2$$

car $H'(x) = -f''(x)(b-x) + A(b-x)$

donc $H'(c) = 0 \iff A = f''(c)$.

en outre puisque $H(b) = 0$

Il faut choisir A telle que
$H(a) = 0$

or $H(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{A}{2}(b-a)^2$

permettant de déterminer la valeur de A en fonction de $f(b)$, $f(a)$, $f'(a)$ et $(b-a)$

En combinant tout, nous obtenons

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

i.e. (car nous savons aussi que $A = f''(c)$)

Il ne reste plus qu'à mettre tout ceci en forme afin d'appliquer le thm de Rolle.

exo29 Par l'absurde, il existe ~~au moins~~ 3 racines de P $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ En appliquant le thm de Rolle 3 fois, nous trouvons $\exists c_1 \in]x_1; x_2[$ et $c_2 \in]x_2, x_3[$ $c_3 \in]x_3, x_4[$ tq $P'(c_1) = P'(c_2) = P'(c_3) = 0$ permettant d'applique de nouveau le thm de Rolle : $\exists \alpha_1 \in]c_1; c_2[$ et $\alpha_2 \in]c_1, c_3[$ | $P''(\alpha) = 0$ OR exo 29

Par l'absurde, s'il y a (au moins) 4 racines
$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

on peut appliquer 3 fois le thm de Rolle

pour obtenir 3 racines de P'
$(c_1 \in]x_1, x_2[\,;\, c_2 \in]x_2 ; x_3[$
et $c_3 \in]x_3 ; x_4[)$

En réitérant, cela fournit 2 racines distinctes
$\alpha_1 \in]c_1, c_2[$ et $\alpha_2 \in]c_2, c_3[$
de P''

or $P''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ n'admet que 0
comme racine.

ce qui est contradictoire.