N° d’anonymat :

Classe :

EPREUVE D’ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE MATHEMATIQUE

Sujet 1 : Mercredi 12 janvier 2022

Calculatrice autorisée, tout document interdit.
Durée : 4h

Le sujet est composé de 4 exercices.
Merci d’indiquer sur l’énoncé et sur vos copies votre numéro d’anonymat**.**
L’énoncé est à rendre avec la copie !
Le plus grand soin doit être apporté à la rédaction et aux calculs.
Veuillez à la lisibilité de votre travail. Soulignez vos résultats.

Exercice n°1: (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$$

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

1) La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12 , ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n , un affichage de deux chiffres pour les parties décimales).
A l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n .
Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture, et d'en déduire la limite de la suite (u_n) .

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

3) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4) Que peut-on conclure des questions 2) et 3) concernant la suite (u_n) ?

5) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{4}{u_n}$.
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
Préciser sa raison et son premier terme.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

6) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .
En déduire la limite de la suite (u_n) .

7) Compléter la fonction Python ci-contre qui, pour tout réel positif A, détermine la plus petite valeur p tel que : u_p <A .

Quelle valeur est renvoyée par l'instruction `seuil(0.3)` ?
Justifier.

```
def seuil(A):
    u=1
    n=0
    while ............. :
        u= ..........
        n=n+1
    return
```

Exercice n°2: **(5 points)**

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - x + e^x$$

1) Dresser en justifiant le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$. (Les limites en $+\infty$ $et - \infty$ ne sont pas attendues).

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$$

On notera (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé d'origine O.

1)

a) Déterminer, en justifiant, la limite de f en $-\infty$.

b) Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout x réel, l'expression de la fonction dérivée est :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

3) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5) Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .

a) Démontrer qu'une équation de T est :

$$y = 2x + 1.$$

b) Démontrer que pour tout x réel, on a :

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{x(1 - e^x)}{e^x}$$

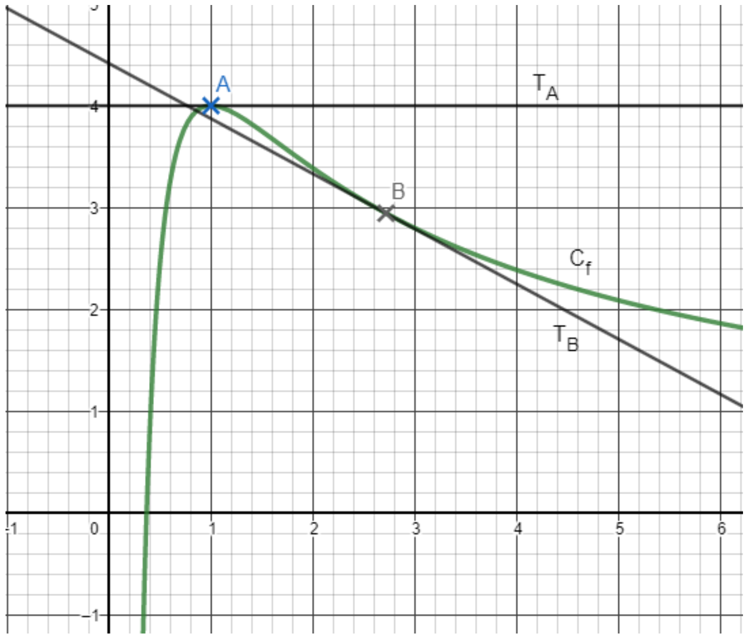
c) En déduire que (C) est toujours située en-dessous de T.

Exercice n°3: (5 points)

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La droite T_A d'équation $y = 4$ est la tangente à la courbe C_f au point $A(1;4)$.

La droite T_B est la tangente à la courbe C_f au point B d'abscisse e .



1) Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

2) Conjecturez les valeurs de $f(e)$ et $f'(e)$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln(x)}{x}$$

3) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

4) Déterminer, pour tout réel strictement positif x, l'expression de $f'(x)$.

5) Déterminer le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Ne pas traiter les questions 6 et 7

6) Démontrer que, pour tout réel strictement positif x, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln(x)}{x^3}$$

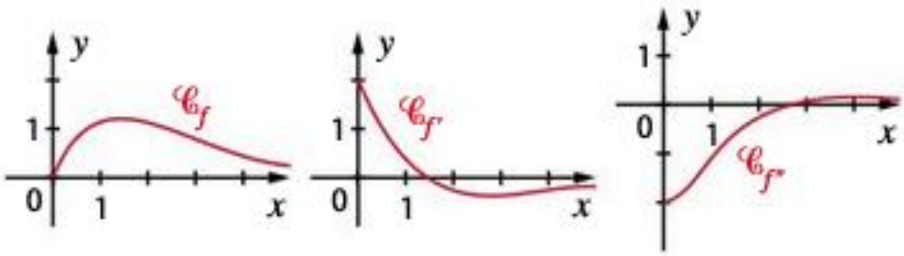
7) Montrer que la courbe C_f possède un unique point d'inflexion D dont on précisera les coordonnées et préciser la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice n°4: (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte.
Le candidat entourera sur l'énoncé la réponse qu'il pense exacte.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte rapporte un demi point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

Question 1 :

Soit la courbe C_f ci-contre, d'une fonction f définie, deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, ainsi que les courbes $C_{f'}$ et $C_{f''}$ de f' et f''.



Ne pas traiter les questions a) et c)

a) f est convexe sur l'intervalle

$[0;+\infty[$	$[4;5]$	$[1.5;+\infty[$	$[0;2.5]$

b) Cf admet une asymptote d'équation

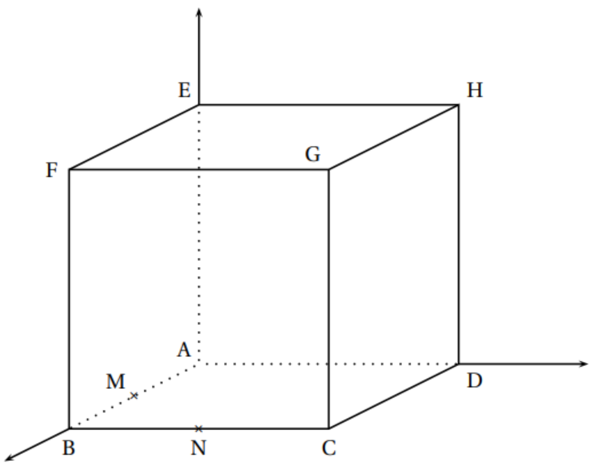
$x = 0$	$y = 0$	$x = 1.5$	Cf n'admet pas d'asymptote

c) Cf admet un point d'inflexion d'abscisse ..

0	1.5	2.5	Cf n'admet pas de point d'inflexion

Question 2 :

Dans le cube ABCDEFGH ci contre, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



a) Le triangle BMN est :

équilatéral	Isocèle et rectangle
rectangle non isocèle	quelconque

b) La section du cube par le plan (EMN) passe par

A	G
H	Un autre sommet du cube

c) Le plan (EMN) coupe la droite (CD) en K . On peut affirmer que …

$\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{CK}$; $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires

Question 3 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

On considère :

- d la droite passant par les points $A(1;1;-2)$ et $B(-1;3;2)$
- d' la droite ayant pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = \ \ 6-3t \\ z = \ \ 8-6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite d' ?

$M_1(-1;3;-2)$	$M_2(11;-9;-22)$	$M_3(-2;3;4)$	$M_4(3;-3;-6)$

b) Un vecteur directeur de la droite d' est :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-9\\-14\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

c) Les droites d et d' sont :

sécantes	non coplanaires	confondues	strictement parallèles

d) L'intersection de la droite d' et du plan $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est le point :

$N_1(0;0;1)$	$N_2(2;0;-4)$	$M_3(0;2;0)$	$M_4(-4;6;0)$