Exploration de différents thèmes : travailler et comprendre une démonstration

Découvrons à présent de nouvelles notions. Cela peut paraître beaucoup sur le moment mais c'est aussi normal d'avoir le sentiment que certaines choses vous échappent sur le moment et qu'il faudra regarder cela à nouveau chez vous, à tête reposée. Il faut être patient et savoir lâcher prise quand cela est nécessaire.

Théorème 8 (Fermat)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I =]a; b[$. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque. Avant d'aborder la démonstration : il parait important de faire une figure pour mieux visualiser la situation. Ensuite, il est important de chercher à comprendre l'idée cachée derrière la démonstration sans trop faire de calculs. Pour cela, il faut revenir à ce que signifie la dérivée et ce qu'elle permet de faire : en substance, localement [6], la fonction se comporte comme une fonction affine [7] :

Si h est petit [8] , nous avons donc

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) \quad \text{et} \quad f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$$

En outre, si $f(x_0)$ est un maximum local nous avons alors , pour tout $h > 0$,

$$f(x_0 - h) \leq f(x_0) \quad \text{et} \quad f(x_0) \geq f(x_0 + h).$$

Observons ce qui se produit dans le membre de droite en utilisant l'approximation donnée par la dérivée. Nous avons

$$f(x_0) \geq f(x_0) + hf'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad 0 \geq f'(x_0).$$

De la même manière, nous trouvons

$$f(x_0) - hf'(x_0) \leq f(x_0) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq f'(x_0).$$

Donc $f'(x_0) = 0$. Il ne reste plus qu'à mettre cette idée en oeuvre de manière rigoureuse mais nous avons déjà une idée assez précise de ce qui se produit.

Démonstration. Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset]a; b[$ soit un voisinage ouvert de x_0 sur lequel $f(x_0)$ est un maximum local. En conséquence, nous avons

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad x_0 - \alpha < x < x_0.$$

D'où, lorsque $x \to x_0$, nous en déduisons que $f'(x_0) \geq 0$. De même, si $x_0 < x < x_0 + \alpha$, nous en déduisons que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Par suite, lorsque $x \to x_0$, $f'(x_0) \leq 0$ d'où le résultat. □

6. lorsque nous nous trouvons à proximité du point d'intérêt
7. Le lecteur avisé retrouvera une partie de la formule liée à l'équation d'une tangente en un point x_0 ; cette étude sera reprise l'année prochaine lorsque le lecteur rencontrera les développements limités dans lesquels une fonction est, localement, approchée par des polynômes ; nous invitons le lecteur à choisir la fonction $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ et $h = 0.01$ pour observer l'erreur commise entre l'approximation et la véritable valeur de f en $x_0 = 2$.
8. Car un nombre dérivée s'obtient via un taux d'accroissement et une limite lorsque $h \to 0$.

Le lecteur pourra constater que certains passages semblent avoir été énoncés un peu rapidement. C'est à lui de vérifier, en classe ou chez lui, que tout se passe bien. Ces vérifications sont essentielles pour s'assurer qu'une démonstration est comprise, ligne à ligne.

Il semble naturel de s'interroger : que dire de la réciproque ? Nous invitons l'élève à faire des essais avec des fonctions de références suffisamment simples pour voir ce qui se produit.

Voyons à présent comment réutiliser ce résultat afin d'obtenir un nouveau théorème plus utile encore. Pour cela, nous aurons besoin d'un outil supplémentaire :

Théorème 9. *Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tels que*

$$\max_{x\in[a;b]} f(x) = f(c).$$

La démonstration du théorème suivant peut se trouver dans un programme de colles.

Théorème 10 (Rolle)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Avant de passer à la démonstration, nous invitons de nouveau le lecteur à faire un dessin et de comparer avec ce qui a été fait pour le théorème de Fermat. Cela lui permettra de renforcer son intuition quant à la démonstration que nous allons exposer et de l'idée qu'il convient de suivre.

Démonstration. Comme nous allons le voir, l'objectif est de montrer que f **admet un maximum local** afin d'appliquer le théorème de Fermat 9.

Si f est une fonction constante alors le résultat est trivial. Sinon, il existe $x_0 \in]a; b[$ tel que, par exemple, $f(x_0) > f(a)$ (le cas $f(x_0) < f(a)$ se traite de manière similaire). De plus, f étant continue sur l'intervalle $[a, b]$ il existe $c \in [a, b]$ (cf. théorème 9) tel que

$$f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

En particulier, $f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$. Autrement dit, $c \in]a, b[$ et $f(c)$ est un maximum (global). Le théorème 8 implique donc que $f'(c) = 0$ ce qui est le résultat. □

Voyons une application du théorème de Rolle.

Théorème 11 (Accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{0.4}$$

L'énoncé du théorème suggère-t-il une idée à suivre ? Pourriez-vous faire un dessin illustrant ce théorème ? A votre avis, à quoi sert ce théorème ?

Démonstration. Posons $H(x) = f(x) - A(x - a)$ avec A une constante (à déterminer) telle que $H(a) = H(b)$. Il est très simple de vérifier que H vérifie les hypothèses du théorème de Rolle 10, il existe alors $c \in]a, b[$ tel que

$$H'(c) = 0 \quad \iff \quad f'(c) = A.$$

Il convient donc de choisir $A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ afin de conclure. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $H(a) = H(b)$ pour un tel choix de A. □

Quelle était l'idée permettant de résumer la démonstration ? Pouvons-nous la réutiliser dans l'exercice suivant ?

Exercice 28. Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que f' est continue sur $[a, b]$ et f'' existe sur $]a, b[$, il existe alors $c \in]a, b[$ telle que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f''(c).$$

Voyons un autre exercice utilisant le théorème de Rolle.

Exercice 29. Soient $n \in \mathbb{N}_*$ ainsi que $a, b \in \mathbb{R}$ et considérons $P(x) = x^n + ax + b$. Démontrer que P admet au plus 3 racines réelles. *Indication : raisonnement par l'absurde et utiliser le théorème de Rolle.*

« *Don't just read it ; fight it ! Ask your own questions, look for your own examples, discover your own proofs. Is the hypothesis necessary ? Is the converse true ? What happens in the classical special case ? What about the degenerate cases ? Where does the proof use the hypothesis ?* » Paul Halmos (1916 – 2006).