Chapitre 1

Majorants et minorants

Ce chapitre a pour vocation d'introduire quelques notions essentielles de l'analyse : l'utilisation de majorants et de minorants ainsi que l'introduction des bornes supérieure et inférieure. Ce sera l'occasion d'étudier les ensembles des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et des nombres réels $\mathbb{R}$. En particulier, nous verrons de quelle manière $\mathbb{R}$ complète l'ensemble $\mathbb{Q}$.

1.1 Majorants et minorants

Comme vous allez le constater au fil des chapitres, il est parfois bien délicat, voir impossible, de tout calculer explicitement. La plupart du temps, les objets mathématiques mis en jeu sont trop complexes et le mathématicien doit se résoudre à faire des estimations, les plus précises possibles, en procédant à des majorations ou des minorations de la quantité étudiée. A cet effet, voici une première définition.

Définition 1.1.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide.*

1. *A est **majoré** par $M \in \mathbb{R}$ si*
$$\text{pour tout} \quad a \in A, \quad a \leq M.$$
2. *A est **minoré** par $m \in \mathbb{R}$ si*
$$\text{pour tout} \quad a \in A, \quad a \geq m.$$

Remarque. M et m **ne sont pas forcément des éléments de** A. Lorsque c'est le cas, nous dirons que M est le **maximum** de A et m le **minimum**. Il faut toutefois être prudent, ces quantités n'existent pas forcément [1].

Voyons quelques exemples élémentaires.

Exemple 1.1.1. 1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Il suffit d'observer la liste des entiers naturels débute par 0 (ainsi tout ensemble non vide E de $\mathbb{N}$ est minoré par 0), il suffit ensuite de choisir le premier entier appartenant à E.

1. Par exemple, 0 minore l'ensemble des $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ mais il n'existe pas d'entier k tel que $\frac{1}{k} = 0$.

2. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément. Ici, le problème provient du fait que $\mathbb{N}$ est infini. Nécessairement, pour que l'ensemble admette un plus grand élément il faut que cet ensemble soit **majoré**.
3. Soit $E = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } k \leq 5.5\}$. Cet ensemble est majoré par 5.5 et le plus grand entier contenu dans E vaut 5.

Continuons notre étude, cette fois-ci avec des ensembles plus élaborés.

Exemple 1.1.2. 1. L'ensemble $A = \{(-1)^n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par 1 et minoré par -1. Ces valeurs sont atteintes pour $n = 0$ et $n = 1$ (par exemple), il s'agit donc du maximum et du minimum de A.
2. $B = \{\frac{1}{1+n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par 1 ; il s'agit d'ailleurs d'un maximum (choisir $n = 0$). B est minoré par 0 mais il ne s'agit pas d'un minimum (i.e. il est n'est pas possible de trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{1+n} = 0$).
3. $C = \{n^2 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}$ est minoré par 0 (il s'agit d'ailleurs d'un minimum) mais C n'est pas majoré. En effet, supposons que ce soit le cas et considérons $M > 0$ tel que $n^2 \leq M$. Considérons ensuite $N = \lfloor\sqrt{M}\rfloor + 1$ [2]. Puisque $N > \sqrt{M}$, cet entier vérifie
$$N^2 > M.$$
Autrement dit, nous avons un élément de C strictement plus grand que M ce qui est absurde.

Bien entendu, seuls, les nombres entiers naturels et relatifs ne sont pas suffisant pour faire des mathématiques. Par exemple, l'équation

$$3x - 1 = 0$$

admet une unique solution $= \frac{1}{3}$ qui est ni un entier ni un nombre décimal [3]. Il s'agit d'un nombre rationnel, un élément de

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \quad ; \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_*\right\}.$$

Nous allons constater que cet ensemble est plus compliqué que celui des entiers relatifs et qu'il n'est pas toujours possible de déterminer un plus grand élément (ou un plus petit). Voyons cela au travers d'un exemple.

Exemple 1.1.3. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \quad ; \quad x < 0\}$. Bien évidemment cet ensemble est non vide ($-1 \in A$ par exemple) et majoré par 0. Nous allons montrer que cet ensemble n'admet pas de plus grand élément. Si jamais $M \in \mathbb{Q}$ était un tel nombre, nous pourrions choisir $N = \frac{M}{2}$ ce nouveau nombre vérifie :

$$N \in A \quad \text{et} \quad M < N$$

ce qui contredit le caractère maximal de M.

En réfléchissant à l'exemple précédent, notre intuition nous dit alors que 0 devrait être le maximum, le problème étant que $0 \notin E$. Il est alors nécessaire d'introduire une nouvelle notion : celle de borne supérieure et inférieure qui généralise la notion de maximum et de minimum.

2. La notation $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$.
3. Ceci peut notamment être démontré en classe de seconde en utilisant un raisonnement par l'absurde et un critère de divisibilité par 3.

Définition 1.1.2 (Caractérisation de la borne supérieure et inférieure)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide et majoré. S'il existe $M^* \in \mathbb{R}$ tel que*

1. *M^* est un majorant de A ;*
2. *pour tout $\varepsilon > 0$, $M^* - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A.*

Nous dirons alors que M^* est le ***plus petit des majorants*** *de A ou la* ***borne supérieure*** *de A. Nous noterons cela par*

$$M^* = \sup A$$

De manière identique, nous pouvons définir ***le plus grand des minorants*** *ou la* ***borne inférieure*** *de A. Dans ce cas, la notation*

$$m_* = \inf A$$

signifie que m_* est un minorant de A et qu'il n'existe pas d'autre minorant m tel que $m > m_*$ (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, $m_* + \varepsilon$ n'est pas un minorant).

Voyons quelques exemples pour illustrer cette nouvelle définition.

Exemple 1.1.4.

1. Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \quad ; \quad x < 0\}$ alors $\sup A = 0$ et l'argumentaire développé dans l'exemple 1.1.3 montre qu'il s'agit du plus petit : pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $0 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. En effet, $N = -\frac{\varepsilon}{2}$ est tel que
$$-\varepsilon < N.$$
2. L'ensemble $\{\frac{1}{1+n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et minoré par 0. Montrons que 0 est sa borne inférieure. Soit $\varepsilon > 0$, nous devons montrer que $0+\varepsilon$ n'est pas un minorant. Pour cela, il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\frac{1}{1+N} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < 1+N \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} - 1 < N.$$
Le choix $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rfloor + 1$ convient.
3. Considérons l'ensemble
$$F = \left\{ \frac{2x}{2x+4} \quad ; \quad x \geq 0 \right\}.$$
Cet ensemble est non vide (en choisissant $x = 2$, nous constatons que $\frac{1}{2} \in F$ par exemple). Cet ensemble est majoré par 1. En effet, observons que tout élément de F vérifie :
$$\frac{2x}{2x+4} = \frac{2x+4}{2x+4} - \frac{4}{2x+4} = 1 - \frac{4}{2x+4} \leq 1$$
puisque $\frac{4}{2x+4} \geq 0$ lorsque $x \geq 0$. Pourtant cette valeur n'est pas un maximum : pour tout $\varepsilon > 0$, $1 - \varepsilon$ n'est plus un majorant de F. Autrement dit, nous devons trouver $x_0 \in F$ tel que
$$1 - \varepsilon < \frac{2x_0}{2x_0+4} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4}{2x_0+4} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 2\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) < x_0.$$
Le choix $x_0 = 2\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1$ convient par exemple.

Alors que nous pensions avoir résolu notre problème précédent (un ensemble n'admet pas forcément un maximum ou un minimum) en introduisant la notion de borne supérieure et inférieure, l'exemple suivant met en évidence une lacune de $\mathbb{Q}$. L'ensemble des nombres rationnels a des trous.

Exemple 1.1.5. Soient $A = \{r \in \mathbb{Q} \quad ; \quad 0 \leq r^2 < 2\}$ et $B = \{r \in \mathbb{Q} \quad ; \quad r^2 > 2\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{Q}$. Nous allons montrer que A n'admet pas de maximum et B n'admet pas de minimum. Pour cela nous allons démontrer que pour tout $r \in A$ (resp. $r \in B$), il existe $s \in A$ (resp. $s \in B$) tel que $r < s$ (resp. $r > s$).

Avant cela, mentionnons tout de même que ces ensembles sont non vides ($0 \in A$ et $3 \in B$ par exemple) ; A est majoré par 2 (par exemple). De même, B est minoré par 1 (par exemple).

Soit $r > 0$ un nombre rationnel et considérons

$$s = r - \frac{r^2 - 2}{r + 2} = \frac{2r + 2}{r + 2}. \tag{1.1.1}$$

Nous en déduisons alors que

$$s^2 - 2 = \left(\frac{2r + 2}{r + 2}\right)^2 - 2 = \frac{2(r^2 - 2)}{(r + 2)^2}. \tag{1.1.2}$$

Vérifions à présent que s vérifie bien les propriétés souhaitées :

- si $r \in A$ alors $r^2 < 2 \iff r^2 - 2 < 0$ donc, en utilisant (1.1.2), $s^2 - 2 < 0 \iff s^2 < 2$. En conclusion $s \in A$. De plus, d'après (1.1.1), $r < s$.
- si $r \in B$ alors $r^2 > 2 \iff r^2 - 2 > 0$ donc, en utilisant (1.1.2), $s^2 - 2 > 0 \iff s^2 > 2$. En conclusion $s \in B$. De plus, d'après (1.1.1), $r > s$.

Le lecteur attentif a sans doute remarqué que $\sup A = \sqrt{2}$ et $\inf B = \sqrt{2}$. Le problème étant, comme avait déjà pu le découvrir les mathématiciens grecs, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. [4]

L'exemple précédent met en évidence une lacune des nombres rationnels qui n'est pas résolue avec les notions de bornes supérieure et inférieure puisque ces valeurs ne sont pas dans l'ensemble des rationnels. $\sqrt{2}$ étant un nombre concret (la diagonale d'un carré de côté 1), il est impératif de régler ce problème. C'est précisément le rôle des nombres réels. En effet, l'ensemble $\mathbb{R}$, par construction (cf. [**?**] qui expose la méthode des coupures de Dedekind, publiée en 1872, pour construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$), vérifie la propriété de bornes supérieures. C'est le contenu du théorème suivant.

Théorème 1. *Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*

Remarque. Il est possible de démontrer (cf. [**?**]) que bornes supérieures et inférieures sont étroitement liées : si l'une existe alors l'autre aussi. Autrement dit, toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

D'après l'exemple 1.1.5, nous avons vu que $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de bornes supérieures ou inférieures (puisque ces dernières ne sont pas des éléments rationnels). Le problème est réglé dès lors que A et B sont considérés comme des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

4. D'ailleurs, en classe de seconde, il est démontré qu'il n'existe pas d'entiers a, b (avec $b \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Ceci justifiant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Par soucis de concision, certaines propriétés essentielles de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Q}$ ne seront abordées qu'en exercice :

- Il s'agit de corps commutatifs totalement ordonnés [5].
- $\mathbb{R}$ est archimédien : pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}_*$ tel que $nx > y$.[6] $\mathbb{Q}$ est également archimédien.
- Les nombres rationnels sont disséminés dans $\mathbb{R}$: si x et y sont des réels tels que $x < y$, alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que
$$x < r < y.$$
Nous dirons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et nous noterons ceci par $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. La démonstration de ce résultat repose sur le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Nous renvoyons le lecteur curieux vers [?] pour plus de détails à ce sujet.

Pour conclure cette section, voici quelques mots à propos de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$ la droite réelle complétée [7].

Définition 1.1.3. *L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est constitué de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ auquel nous ajoutons deux symboles $+\infty$ et $-\infty$. L'ordre usuel des réels est préservé et nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$-\infty < x < +\infty.$$

Remarque. Les règles arithmétiques impliquant $+\infty$ et $-\infty$ sont déjà connues par les lycéens ayant étudié la notion de limite. Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x + \infty = +\infty \quad ; \quad \frac{x}{+\infty} = 0 \quad ; \quad \ldots$$

Nous rappelons tout de même qu'il faut prendre garde aux formes indéterminées.

La droite complétée $\overline{\mathbb{R}}$ permet d'étendre légèrement la notion de borne supérieure et inférieure : si $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble non vide non majoré alors $\sup A = +\infty$. Le même raisonnement s'applique pour les minorants et la borne inférieure.

La droite réelle complétée sera de nouveau utilisée lorsque nous introduirons la notion de limite supérieure et inférieure.

1.2 Bilan

Il est essentiel de s'entrainer à majorer, minorer différentes quantité et d'être à l'aise à l'utilisation, via leur caractérisation, des notions de bornes supérieures ou inférieures.

5. ceci signifiant qu'il est possible de comparer n'importe quel couple de nombre réels ou de rationnels
6. La terminologie s'explique en songeant à Archimède qui affirmait pouvoir soulever le monde à condition d'avoir un levier suffissament grand.
7. Le lecteur pourra avoir aussi rencontré la terminologie : « droite réelle achevée ».

1.3 Remarques historiques

Voici quelques mots à propos des objets mathématiques présentés dans le chapitre 1. A compléter.

Les nombres entiers sont connus depuis Euclide (environ 300 av. J.C.), la notation $\mathbb{N}$ est introduite par Peano en 1894 et sa construction formelle a été établie (de manière indépendante) par Peano et Dedekind à la fin du 19ème siècle. C'est d'ailleurs grâce à l'axiomatique de Peano que le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$ peut se mettre en oeuvre.

Les nombres entiers relatifs (les entiers possédant éventuellement un signe « $-$ ») apparaissent dans des textes du mathématiciens indien Ârybhata $(476-550)$: ils permettent de traiter la notion de dettes et de recettes. Ces nombres sont également présents dans les écrits du perse Abu I-Wafa $(940-998)$; en revanche, il faut attendre les travaux de Stevin $(1548-1620)$ pour qu'ils apparaisent en Europe. La construction formelle de cette ensemble est de nouveau obtenue par Dedekind $(1831-1916)$ et la notation $\mathbb{Z}$ (du mot allemand *Zahlen* signifiant *nombres*) est popularisée par le mathématicien polycéphale Bourbaki (né en 1935).

La notion de fraction est déjà présente dans des papyrus égyptiens (notamment le papyrus *Rhind* datant de -1650 av. J.C.) mais leur véritable construction mathématique date des travaux de Peano en 1895 ; il choisit la lettre $\mathbb{Q}$ (de l'italien *quoziente* signifiant *quotient*) pour désigner de tels nombres.

Certains nombres comme π ou $\sqrt{2}$ ne peuvent s'exprimer comme des fractions, l'ensemble $\mathbb{R}$ contenant ces nombres n'a été inventé qu'à la fin du 19ème siècle par les mathématiciens Cantor et Dedekind. En particulier, $\pi \in \mathbb{R}$ **et** $\pi \notin \mathbb{Q}$**, nous dirons que** π **est irrationnel**.

La vidéo suivante propose un résumé de ce que nous venons de présenter :

https://www.arte.tv/fr/videos/097454-009-A/voyages-au-pays-des-maths/.

1.4 Exercices

Exercice 1.1. Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 1.2. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ décrits ci-dessous sont-ils majorés, minorés ? Admettent-ils un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ? Si oui, donner leur valeur.

1. $[0,3] \cup]2,4[$
2. $]-\infty,3[\cap]2,+\infty[$
3. $[0,2[\cup]3,4]$
4. $\mathbb{R} \backslash [0,3[$
5. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$
6. $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2},2]$
7. $\left\{2-\frac{1}{n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}_*\right\}$

8. $\{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |x-1| < 2\}$
9. $\{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |x-1| \leq |x+1|\}$
10. $\{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \cos(x) \leq \frac{1}{2}\}$.

Exercice 1.3. Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides. On suppose que B est majoré.

1. Montrer que A et majoré et qu'il admet une borne supérieure.
2. En déduire que $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 1.4. Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants. Vérifier ensuite s'il s'agit de maximum ou de minimum.

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{2}{n^2} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}_*\right\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{x+1}{x+2} \quad \text{avec} \quad x \in]-\infty; -3]\right\}$$

Pour l'ensemble B, proposer une seconde méthode en étudiant les variations de $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Exercice 1.5. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ est un ensemble archimédien : pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}_*$ tel que $nx > y$.

Indication : pour $x > 0$ fixé, considérer $A = \{nx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}$. Raisonner ensuite par l'absurde avec $\alpha = \sup A$ (après avoir justifié son existence) pour aboutir à une contradiction.

Exercice 1.6 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

1. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, si x et y sont des réels tels que $x < y$, alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que
$$x < r < y.$$
Indication : distinguer suivant si $y - x > 1$ ou non pour construire le nombre rationnel voulu. Le lecteur est invité à utiliser sans réserve le résultat démontré dans l'exercice précédent[8].
2. A l'aide de ce qui précède, montrer qu'il existe une suite (r_n) de nombres rationnels telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \sqrt{2}$.[9]
Indication : considérer une suite d'intervalles centrés autour de $\sqrt{2}$ avec un rayon approprié.

8. Il se trouve que ces deux résultats sont en fait équivalent.
9. Ce résultat est valable pour n'importe quel réel x.