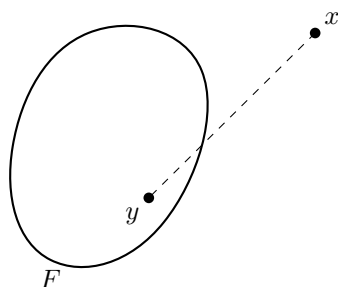


Chapitre 13

Series de Fourier et espaces de Hilbert

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $d \geq 1$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. Considérons $x \in E$ et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide. Nous nous demandons comment déterminer $y_0 \in F$ telle que la distance entre x et y_0 soit minimale. Autrement dit, nous nous intéressons à optimiser $\inf_{y \in F} \|x - y\|$.



Plusieurs questions surviennent : comment choisir F pour obtenir l'existence d'un minimiseur ? Est-il possible d'obtenir unicité de ce minimiseur ? De quelle manière cela dépend-il de la norme employée ? Dans cette partie, pour simplifier, nous supposons que $x = 0$.

Lemme 13.1. Soit F un ensemble fermé de E . Alors, il existe $y_0 \in F$ tel que

$$\min_{y \in F} \|y\| = \|y_0\|.$$

Remarque. Il est essentiel est que E soit de dimension finie, cela permet d'utiliser le fait que les ensembles compacts en dimension finie sont les ensembles fermés et bornés (cf. théorème de Riesz ??) pour ensuite appliquer via le théorème de Bolzano-Weierstrass 2.8.

Démonstration. Soit $d = \inf_{y \in F} \|y\|$. Par définition de l'infimum, il existe alors (y_n) une suite d'éléments de F telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\| = d.$$

Puisque (y_n) est une suite convergente (vers $d \geq 0$), il s'agit d'une suite bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass 2.8 nous assure¹ qu'il existe (n_k) une sous-suite et $y_0 \in E$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|y_{n_k}\| = \|y_0\|.$$

En outre, puisque F est fermé, nous savons que $y_0 \in F$. Puisque (y_n) converge vers d , par unicité de la limite, nous avons donc montré que

$$\inf_{y \in F} \|y\| = \|y_0\|.$$

□

Pour obtenir l'unicité du minimiseur, il va falloir supposer que des propriétés de convexité soient satisfaites. Voici la définition de la notion que nous allons utiliser.

Définition 13.0.1. 1. Un ensemble F , non vide, est dit convexe si pour tout $x, y \in F$ alors

$$[x, y] \subset F \iff (1-t)x + ty \in F \quad \forall t \in [0, 1].$$

2. Une norme $\|\cdot\|$ est **strictement convexe** si pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in E$

$$\|tx + (1-t)y\|_2 = t\|x\| + (1-t)\|y\| \iff x = y \quad \text{et} \quad t \in \{0, 1\}.$$

Ou, dit autrement, pour tout $t \in]0, 1[$ et pour tout $x \neq y$, nous avons

$$\|tx + (1-t)y\| < t\|x\| + (1-t)\|y\|$$

Remarque. Géométriquement, la deuxième assertion signifie que les boules associées à la norme $\|\cdot\|$ sont bien arrondies, il n'y a pas de côté « plat ».

Voyons ces notions mises en œuvre dans notre problème d'optimisation.

Lemme 13.2. Soient $\|\cdot\|$ une norme strictement convexe et F un ensemble convexe. Alors $\min_{y \in F} \|y\|$ admet au plus un minimiseur.

Démonstration. Par l'absurde, si x_1 et x_2 minimisent la norme $\|\cdot\|$ sur F alors

$$\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| < \frac{1}{2}\|x_1\| + \frac{1}{2}\|x_2\| = \min_{y \in F} \|y\|$$

ce qui est contradictoire puisque, par convexité, $\frac{x_1+x_2}{2} \in F$. □

1. En fait, nous appliquons le théorème de Bolzano-Weierstrass coordonnée par coordonnée. Puisque E est de dimension d , cela signifie que y_n peut s'exprimer sous la forme $y_n = (y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(d)})$ dans une base. Puisque (y_n) est bornée, cela entraîne que $(y_n^{(1)})$ est une suite réelle bornée, elle admet donc une sous-suite convergente $y_{n_k}^{(1)}$ vers y_1 . En se restreignant à cette sous-suite, nous avons $(y_{n_k}^{(2)})$ une autre sous-suite bornée : elle admet elle aussi une sous-suite convergente vers y_2 . Il ne reste plus qu'à répéter cet argument pour extraire une nouvelle sous-suite convergente des coordonnées suivantes afin d'obtenir une sous-suite qui converge pour toutes les coordonnées ; nous utilisons ensuite que l'application $y \mapsto \|y\|$ est continue par rapport à chaque coordonnée.

Le fait d'être en dimension finie nous permet d'identifier² E à \mathbb{R}^d que nous munissons de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$e_i = (0, \dots, 1, \dots)$$

est le vecteur où toutes les coordonnées sont nulles sauf la i ème. Un des avantages de ceci est qu'il devient possible, d'exprimer, de manière unique, un élément $x \in \mathbb{R}^d$ dans la base canonique :

$$x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Ceci nous permet alors de choisir des normes sur E définies de manière explicite. Considérons par exemple, le cas des normes l^p , $p \geq 1$ (notées $\|\cdot\|_p$) où

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^d x_i^p \quad \text{si } x = (x_1, \dots, x_d).$$

Jouons un peu avec nos hypothèses pour voir ce qui peut se produire sur des exemples.

Exemple 13.0.1. 1. Soit $F = \{(-1, 0); (0, 1); (2, 2)\}$ est un ensemble fermé de \mathbb{R}^2 . Cependant, il se trouve que $\min_{y \in F} \|y\|_2$ est atteint pour deux vecteurs $y_0 = (-1, 0)$ et $y_1 = (0, 1)$. L'absence de convexité de l'ensemble F empêche l'unicité du minimiseur.

2. Soit $F = \{(t, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ il s'agit d'un ensemble convexe et fermé de \mathbb{R}^2 . De plus,

$$\min_{y \in F} \|y\|_\infty = \min_{y \in F} \max(|t|, 1) = 1$$

or $y_0 = (0.5, 1) \in F$ et $y_1 = (-0.25, 1) \in F$ sont des minimiseurs. Ici, il n'y a plus d'unicité du minimiseur car nous avons remplacé la norme $\|\cdot\|_2$ par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque. Dans le deuxième cas de figure, $H = \{(|t|, 1), \quad 0 \leq t < 1\}$ correspond à l'ensemble des minimiseurs, il y en a donc une infinité. Le problème étant que la norme $\|\cdot\|_\infty$ (tout comme la norme $\|\cdot\|_1$) n'est pas strictement convexe. En effet, par exemple dans \mathbb{R}^2 , si $x = (1, 1)$ et $y = (1, -1)$ et $t = \frac{1}{2}$ alors

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_\infty = \frac{\|x\|_\infty + \|y\|_\infty}{2}.$$

En fait, parmi les normes l^p , seuls les cas $p = 1$ et $p = \infty$ correspondent à des normes qui ne sont pas strictement convexes.

Proposition 13.3. *Si $1 < p < \infty$ alors $\|\cdot\|_p$ est uniformément convexe.*

Démonstration. La démonstration est seulement esquissée (cf. [] pour plus de détails) et repose sur le fait suivant : pour tout $a, b \geq 0$,

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} |a|^p + \frac{1}{2} |b|^p.$$

². Nous utiliserons la notation \mathbb{R}^d lorsque les coordonnées seront employés et la notation E lorsqu'il n'y en a pas vraiment besoin.

Il est facile d'établir ceci lorsque $p \geq 2$ (le cas $1 < p < 2$ est plus délicat). En effet, l'étude des variations de la fonction $f(t) = (1 + t^2)^{\frac{p}{2}} - 1 - t^p$ pour tout $t \geq 0$ permet de montrer que pour tout $x, y \geq 0$,

$$x^p + y^p \leq (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}}$$

Il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité obtenue avec $x = \left| \frac{a+b}{2} \right|$ et $y = \left| \frac{a-b}{2} \right|$ et enfin d'utilisant la convexité de $t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ pour conclure. \square

Nous avons déjà répondu de manière satisfaisante à notre question initiale (à savoir, identifier les conditions permettant de résoudre notre problème de minimisation) en mettant en évidence le fait que l'ensemble doit être **fermé et les propriétés de convexité** (de l'ensemble et de la norme) à utiliser.

Notons qu'une partie de notre raisonnement (l'existence) utilise de manière cruciale le fait que l'espace vectoriel est de dimension fini (via l'utilisation du théorème de Bolzano-Weierstrass). Voyons à présent s'il est possible d'aller plus loin dans notre raisonnement : est-il possible d'obtenir, dans certains cas, une caractérisation et une expression du minimiseur ?

Pour cela, nous allons supposer que E est un espace euclidien de dimension d . Cela signifie que cet espace est muni d'un produit scalaire dont l'expression dans la base canonique est donnée par

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i \quad (13.0.1)$$

où $x = (x_1, \dots, x_d) \in E$ et $y = (y_1, \dots, y_d) \in E$. La formule (13.0.1) que nous venons de donner tire, implicitement, parti du fait que la base \mathcal{B} canonique est orthonormée. Cela signifie que la famille de vecteurs e_1, \dots, e_d vérifient, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$,

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Nous rappelons que deux vecteurs sont dit orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Si jamais la base choisie n'est pas orthonormée, il toujours est possible d'utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (cf. [1]) pour que cela soit le cas.

La formule (13.0.1) montre en particulier que la norme l^2 présentée plus tôt découle du produit scalaire : $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

Par la suite, nous utiliserons la notation $\langle x, y \rangle$ pour désigner le produit scalaire entre deux éléments de E ; cette notation sera utile pour les généralisations que nous allons exposer par la suite. Comme nous allons le voir la notion d'orthogonalité va avoir des conséquences intéressantes vis-à-vis de notre problème initial de projection sur un ensemble. Listons déjà certains résultats (valables grâce au produit scalaire) qui nous serviront par la suite

1. Tout d'abord, le fait d'avoir une base orthonormée \mathcal{B} permet d'identifier simplement les coefficients x_i intervenant dans la décomposition de x dans la base \mathcal{B} . En effet, si $x = \sum_{k=1}^d x_k e_k$ il suffit, pour tout $i = 1, \dots, d$, de calculer les produits scalaires entre x et e_i :

$$\langle x, e_i \rangle = x_i$$

puisque $\langle e_k, e_i \rangle = 0$ si $i \neq k$.

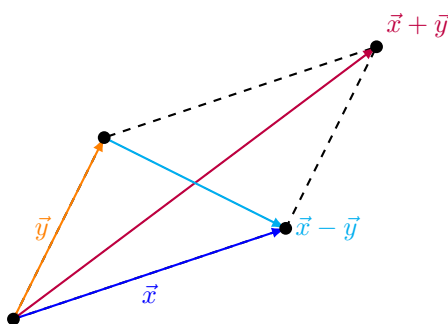
2. Nous pouvons étendre des résultats de géométrie du plan en dimension supérieur : x est orthogonal à y si et seulement si

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \quad (13.0.2)$$

ce qui correspond à une généralisation du théorème de Pythagore³.

3. Il est également possible d'obtenir, via les mêmes arguments, l'identité du parallélogramme : pour tout $x, y \in E$,

$$\|x - y\|_2^2 + \|x + y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2). \quad (13.0.3)$$



Revisitons maintenant notre problème d'optimisation, cette fois-ci uniquement pour la norme $\|\cdot\|_2$. Nous allons constater que les propriétés géométriques (l'orthogonalité) satisfaites par la norme euclidienne nous permettent d'éviter d'avoir recours au théorème de Bolzano-Weierstrass (facilitant d'éventuelles généralisations à des espaces vectoriels normés de dimension infinie).

Proposition 13.4 (Projection orthogonale). *Soient F un ensemble fermé et convexe de \mathbb{R}^d ainsi que $x \in \mathbb{R}^d$. Alors, il existe un unique $y_0 \in F$ tel que*

$$\min_{y \in F} \|x - y\|_2 = \|x - y_0\|_2.$$

Nous appellerons y_0 le projeté orthogonal de x sur F et le noterons $y_0 = p_F(x)$. De plus, y_0 est caractérisé par la propriété suivante : pour tout $y \in F$,

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0. \quad (13.0.4)$$

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soit $x, y \in F$ et appliquons l'identité du parallélogramme (13.0.3) à $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_2^2 = 2 \left(\left\| \frac{x}{2} \right\|_2^2 + \left\| \frac{y}{2} \right\|_2^2 \right) \iff \|x - y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) - 4 \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2^2.$$

3. La démonstration ici réside simplement à développer, pour tout $x, y \in E$, $\|x + y\|_2^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ en utilisant les propriétés algébriques du produit scalaire.

Puisque F est convexe alors $\frac{x+y}{2} \in F$ et nous déduisons de ce qui précède l'inégalité suivante

$$\|x - y\|_2^2 \leq 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) - 4d^2.$$

Ainsi, si x et y sont des minimiseurs (i.e. $\|x\|_2 = \|y\|_2 = d$) alors $x = y$.

Passons à l'existence. L'idée est de montrer qu'une suite minimisante est une suite de Cauchy. Puisque \mathbb{R}^d est complet, cette suite convergera donc vers le minimiseur. Considérons alors (y_n) une suite minimisante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in F$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\|_2 = \inf_{y \in F} \|x - y\|_2$. Posons alors

$$d_n = \|x - y_n\|_2 \quad \text{et} \quad d = \inf_{y \in F} \|x - y\|_2.$$

Utilisons de nouveau l'identité du parallélogramme⁴ : pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|_2^2 + \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|_2^2 = \frac{d_n^2 + d_m^2}{2}$$

Puisque $\frac{y_n + y_m}{2} \in F$, forcément $\left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|_2^2 \geq d^2$. D'où,

$$\left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|_2^2 \leq \frac{d_n^2 + d_m^2}{2} - d^2$$

Quitte à choisir n, m assez grand ceci montre que (y_n) est une suite de Cauchy. Comme \mathbb{R}^d est complet elle converge donc vers $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Enfin, $y_0 \in F$ puisqu'il s'agit aussi d'une suite d'éléments de F qui est un ensemble fermé.

Passons à la caractérisation. Soit y_0 le minimiseur et $y \in F$ et, pour tout $t \in]0, 1]$, considérons $y_t = (1 - t)y_0 + ty \in F$. Dans ce cas,

$$\|x - y_0\|_2 \leq \|x - y_t\|_2 = \|(x - y_0) - t(y - y_0)\|_2.$$

Il reste maintenant à élever l'inégalité précédente au carré et développer les produits scalaires sous-jacents. Nous obtenons

$$\|x - y_0\|_2^2 \leq \|x - y_0\|_2^2 - 2t\langle x - y_0, y - y_0 \rangle + t^2\|y - y_0\|_2^2 \iff \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq t\|y - y_0\|_2^2$$

et le résultat s'ensuit en faisant $t \rightarrow 0$. Réciproquement, si y_0 vérifie (13.0.4) alors, pour tout $y \in F$,

$$\|x - y_0\|_2^2 - \|y - y_0\|_2^2 = 2\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$$

d'où le résultat. □

Remarque. 1. L'utilisation des propriétés géométriques du produit scalaire a permis d'éviter le recours à l'utilisation de la compacité (via le théorème de Bolzano-Weierstrass qui ne serait plus disponible en dimension infinie) en lui substituant un argument de complétude (qui est plus simple à établir).

4. Ce qui suit est déjà essentiellement contenu dans ce qui a été fait pour l'unicité, nous préférons détailler les arguments pour le confort du lecteur mais aussi pour mettre en évidence la force des arguments géométriques mis à l'œuvre.

2. Mentionnons le fait que la norme euclidienne vérifie une propriété plus forte encore que la stricte convexité⁵. Grâce à l'identité du parallélogramme, nous pouvons montrer qu'elle est **uniformément convexe** : pour tout $\epsilon \in]0, 2]$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\|_2 = 1$, $\|y\|_2 = 1$ et $\|x - y\|_2 \geq \epsilon$ entraîne que

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|_2 \leq 1 - \delta.$$

Cette propriété géométrique a des conséquences remarquables en terme de dualité pour un espace de Banach. nous reviendrons la dessus dans un chapitre ultérieur.

Le fait que n'importe quel vecteur de E se décompose simplement dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ nous permet même d'aller plus loin encore et d'obtenir une formule explicite du projeté orthogonal lorsque F est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 13.5 (Projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel). *Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ avec $j \in \{1, \dots, n\}$ un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^d . Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout élément $y \in F$ nous avons toujours*

$$\|x - y\|_2 \geq \|x - p_F(x)\|_2$$

avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$ où $p_F(x) = \sum_{i=1}^j \langle x, e_i \rangle e_i$

Remarque. Si F^\perp désigne l'orthogonal de F (i.e. l'ensembles des vecteurs orthogonaux aux éléments de F) alors nous avons toujours la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^d = F \oplus F^\perp$ ⁶. Autrement dit, tout élément $x \in \mathbb{R}^d$ se décompose de manière unique en

$$x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$$

avec $p_{F^\perp}(x) = \sum_{l=j+1}^n \langle x, e_l \rangle e_l$ et $\langle p_F(x), p_{F^\perp}(x) \rangle = 0$; finalement, tout ceci est étroitement lié au théorème de Pythagore.

Maintenant que nous avons obtenu un réponse satisfaite à nos interrogations en dimension finie, nous allons voir ce qui se produit en dimension infinie. Comme exposé plus tôt, l'utilisation d'un produit scalaire semble être une piste prometteuse. Dans ce qui suit nous allons voir une généralisation de l'espace euclidien. Pour cela, nous allons devoir généraliser les notions de produit scalaire et de base orthonormée à des espaces de dimension infinie. Nous aborderons ensuite des questions d'optimisations dans le contexte des séries de Fourier et des fonctions périodiques.

5. La stricte convexité s'obtient aisément via l'identité du parallélogramme.

6. L'obtention de ce résultat est purement algébrique et est facilité par le fait que nous sommes en dimension finie, nous verrons qu'il faudra être précautionneux lorsque nous généraliserons ceci.

13.1 Propriétés élémentaires des espaces de Hilbert

L'objectif est d'introduire les notions nécessaires pour généraliser l'espace euclidien \mathbb{R}^d à des espaces de dimension infinie; en particulier, nous allons étudier la notion de base orthonormée et de projection orthogonale. Cela permettra de produire des raisonnements géométriques, comme si nous étions en dimension finie, afin de résoudre des problèmes élaborés.

Définition 13.1.1. Soit H un espace vectoriel réel. Nous dirons que H est un espace préhilbertien (réel) s'il est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$. Il s'agit d'une application vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'application est symétrique, pour tout $x, y \in H : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. L'application est linéaire, pour tout $x, y, z \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$$

3. L'application est positive : pour tout $x \in H$, $\langle x, x \rangle \geq 0$.
4. L'application est définie : $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Remarque. La combinaison des deux premières propriétés montre que l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est bilinéaire et symétrique. Les deux dernières propriétés nous assure que cela à du sens de définir

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Voyons quelles conséquences nous pouvons tirer de tout ceci. En particulier, quelles sont les propriétés vérifiées par $x \mapsto \|x\|$.

Proposition 13.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et de Minkowski). Soient H un espace préhilbertien et $x, y \in H$. Les inégalités suivantes sont alors satisfaites

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (13.1.1)$$

avec égalité si et seulement si $x = \lambda y$ avec $\lambda \neq 0$.

2. Inégalité de Minkowski :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (13.1.2)$$

Remarque. Nous reconnaissons des inégalités que nous avons déjà rencontrées dans les espaces L^p (pour l'inégalité de Minkowski) et L^2 (pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz). L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous montre aussi que le produit scalaire est une application continue sur H^2 .

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$ et considérons le polynôme $P(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2$. Puisque $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela signifie que $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ d'où le résultat.

Passons à la deuxième inégalité. Nous avons, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (13.1.1)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

d'où le résultat. □

Ce qui précède nous assure que l'application $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur H . Cela permet de définir une distance sur H en posant $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in H$.

Définition 13.1.2. *Un espace préhilbertien est un espace de Hilbert s'il est complet pour la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.*

Voyons quelques exemples.

- Exemple 13.1.1.**
1. \mathbb{R}^d muni du produit scalaire euclidien $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ est un espace de Hilbert.
 2. $L^2(\mathbb{R})$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$ est un espace de Hilbert.
 3. $C^0([0, 1])$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ n'est pas un espace de Hilbert (car il n'est pas complet).
 4. $l^2(\mathbb{N})$ muni de $\langle x, y \rangle = \sum_{i \geq 0} x_i y_i$ si $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un espace de Hilbert.

Remarque. Les espaces $L^2(\mathbb{R})$, $l^2(\mathbb{N})$ et \mathbb{R}^d sont conceptuellement similaires : la différence réside dans la mesure employée (celle de Lebesgue ou celle de comptage) et l'espace mesurable considéré (\mathbb{R} , \mathbb{N} ou $\{1, \dots, n\}$).

Le fait que la norme découle d'un produit scalaire permet d'obtenir une première propriété géométrique : l'identité du parallélogramme (cf. (13.0.3)) est toujours valide dans les espaces préhilbertiens.

Proposition 13.7 (Identité du parallélogramme). *Soit H un espace préhilbertien alors, pour tout $x, y \in H$,*

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (13.1.3)$$

Démonstration. Il suffit d'additionner les égalités suivantes :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

□

Sans nul doute que l'existence de l'identité (13.1.3) sera un atout non négligeable pour obtenir une projection orthogonale dans un espace de dimension infini. Voyons à présent ce que devient la notion d'orthogonalité dans les espaces préhilbertiens.

13.1.1 Notions d'orthogonalité

Définition 13.1.3. *Soient H un espace préhilbertien ainsi que $x, y \in H$.*

1. *Nous dirons que x est orthogonal à y (ceci sera noté $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$.*
2. *Si $F \subset H$, son orthogonal est $F^\perp = \{y \in H, \langle y, x \rangle = 0, \forall x \in F\}$.*

Remarque. Il se trouve que F^\perp est toujours un **sous-espace vectoriel fermé**⁷ de H , peu importe l'ensemble F considéré. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier ceci.

La notion d'orthogonalité permet de généraliser le théorème de Pythagore aux espaces préhilbertiens.

Proposition 13.8 (Pythagore). *Soient H un espace préhilbertien. Si $x, y \in H$, nous avons l'équivalence suivante*

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 \iff x \perp y.$$

7. Le fait que F^\perp soit fermé provient de la continuité du produit scalaire.

Plus généralement, nous pouvons établir (en reprenant mots pour mots ce que nous avons fait dans la démonstration de la proposition 13.4) un théorème de projection orthogonale dans les espaces de préhilbertiens.

Théorème 13.9 (Projection Orthogonale). *Soient $(H, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien, $F \subset H$ une partie convexe non vide et fermée de H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique point $y \in F$ tel que*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$$

Ce point (noté $p_F(x)$) est la projection orthogonale de x sur F et l'application $x \mapsto p_F(x)$ est uniformément continue sur H . Le projeté orthogonal est caractérisé comme étant l'unique élément $y \in F$ vérifiant

$$\langle z - y, x - y \rangle \leq 0, \quad \forall z \in F.$$

Enfin, lorsque F est un sous-espace vectoriel fermé de H , la projection sur $p_F : H \rightarrow F$ est une application linéaire continue et le projeté orthogonal $y = p_F(x)$ est caractérisé par

$$\langle z, x - y \rangle = 0 \quad \forall z \in F. \quad (13.1.4)$$

En particulier, $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Remarque. Notons que, contrairement à la proposition 13.4, nous ne disposons pas de base orthonormée pour faciliter nos calculs et obtenir une expression plus précise du projeté orthogonal.

Démonstration. Traitons seulement le dernier point, le reste étant similaire à ce qui a été fait dans l'introduction dans la démonstration de la proposition 13.4.

Soient F un sous-espace vectoriel fermé de H , $x \in H$ et $y \in F$ son projeté orthogonal. Pour tout $z \in F$, nous avons que $y - z \in F$ et $y + z \in F$. En utilisant la caractérisation du projeté orthogonal pour ces deux vecteurs nous en déduisons que

$$\langle y + z - y, x - y \rangle \leq 0 \quad \iff \quad \langle z, x - y \rangle \leq 0$$

et

$$\langle y - z - y, x - y \rangle \leq 0 \quad \iff \quad \langle z, x - y \rangle \geq 0$$

d'où $\langle z - y, x - y \rangle = 0$. □

La projection orthogonale est toujours un moyen utile pour obtenir des décompositions algébriques lorsque F possède une structure d'espace vectoriel.

Corollaire 13.10. *Soit H un espace préhilbertien.*

1. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H alors*

$$H = F \oplus F^\perp.$$

2. *Si F est un sous-espace vectoriel quelconque de H nous avons toujours $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$. En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Remarque. En dimension finie, il n'était pas nécessaire de supposer que F soit fermé⁸, la décomposition en somme directe s'obtenait de manière purement algébrique et utilisait de manière essentielle des résultats de dimension et de base. Nous verrons dans un instant, via un exemple, que ceci est plus délicat en dimension infinie.

Démonstration. 1. Soit F un sous-ensemble fermé de H , si $x \in H$ nous notons $y \in F$ son projeté orthogonal. Observons ensuite que $z = x - y \in F^\perp$ (d'après (13.1.4)) d'où $H = F + F^\perp$. De plus $F \cap F^\perp = \{0\}$ car tout élément z se trouvant dans l'intersection vérifie $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = 0$ donc $H = F \oplus F^\perp$. Puisque F^\perp est un sous-espace vectoriel fermé, l'unicité de la projection orthogonale entraîne que $z = p_{F^\perp}(x)$.

2. Supposons maintenant que F est un sous-espace vectoriel quelconque de H . Pour montrer que $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$, procédons par double inclusion. Si $x \in \overline{F}^\perp$ alors $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in \overline{F}$. En particulier, cela est encore vrai pour tout $y \in F$ d'où $x \in F^\perp$; nous avons donc montré que $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$. Réciproquement, si $x \in F^\perp$ et $y \in \overline{F}$ alors il existe $y_n \in F$ tel $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ et, par continuité du produit scalaire, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, y_n \rangle = \langle x, y \rangle = 0$$

donc $x \in \overline{F}^\perp$; nous avons donc établi que $\overline{F}^\perp = (F^\perp)^\perp$. En utilisant l'unicité des projections orthogonales⁹ nous obtenons que

$$p_{\overline{F}} + p_{\overline{F}^\perp} = I_{d_H} = p_{\overline{F}} + p_{F^\perp},$$

avec I_{d_H} est l'application identité de H , d'où $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$. La caractérisation de la densité provient du fait que $H^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = H$. □

Remarque. En particulier, sous les hypothèses de la première assertion, tout élément $z \in H$ se décompose de manière unique sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in F^\perp$. De plus, x est le point le plus proche de z dans F tandis que y est le plus proche de z dans F^\perp . Ceci est à mettre en parallèle avec le théorème de Pythagore 13.8.

Pour bien saisir la différence qui réside entre la dimension infinie et la dimension finie, il convient de prendre le temps de réfléchir à l'hypothèse supplémentaire portant sur F qui doit être un sous-espace vectoriel fermé alors que cette propriété topologique était satisfaite automatiquement en dimension finie.

Exemple 13.1.2. Soit $H = l^2(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des suites de carrés sommables muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \geq 1} x_i y_i$$

où $x = (x_i)_{i \geq 1}$ et $y = (y_i)_{i \geq 1}$. Il s'agit d'un espace de Hilbert¹⁰. Considérons également F l'ensemble composé des suites nulles à partir d'un certain rang. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $l^2(\mathbb{N}_*)$.

8. Nous rappelons que le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'établir facilement qu'un espace vectoriel de dimension finie est complet.

9. Le théorème 13.9 s'applique bien puisque \overline{F} et F^\perp sont des espaces vectoriels fermés.

10. Il s'agit de l'espace $L^2(X)$ où $X = \mathbb{N}_*$ muni de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_*)$ et de la mesure de comptage.

1. F n'est pas fermé dans $l^2(\mathbb{N}_*)$. En effet, soit $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots) \in l^2(\mathbb{N}_*)$ mais $x \notin F$. Considérons ensuite, pour tout $k \geq 1$, la suite $x^{(k)}$ définie par

$$x^{(k)} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots) \in F.$$

De plus, $\|x - x^{(k)}\|_2^2 = \sum_{n \geq k+1} \frac{1}{n^2}$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x - x^{(k)}\|_2^2 = 0$: i.e. la suite $x^{(k)}$ converge dans $l^2(\mathbb{N}_*)$ vers $x \notin F$. En conclusion, F n'est pas fermé et le même raisonnement permet de montrer que $\overline{F} = l^2(\mathbb{N}_*)$.

2. Si la première assertion du théorème 13.10 était valable sans l'hypothèse F fermé, nous devrions avoir

$$l^2(\mathbb{N}_*) = F \oplus F^\perp.$$

Déterminons maintenant $F^\perp = \{y \in l^2(\mathbb{N}_*) \mid \forall x \in F \langle x, y \rangle = 0\}$. Notons que, pour tout $k \geq 1$, la suite $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ qui a tous ses termes nuls sauf le k -ième est un élément de F . Si $y = (y_i)_{i \geq 1} \in F^\perp$, nous devons avoir, pour tout $k \geq 1$,

$$\langle e_k, y \rangle = 0 \iff y_k = 0 \iff y = 0$$

d'où $F^\perp = \{0\}$. Ceci implique alors que $l^2(\mathbb{N}_*) = F$ ce qui est absurde.

3. Nous pouvons même aller plus loin. Reprenons $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots)$ qui est un élément de $l^2(\mathbb{N}_*)$ n'appartenant pas à F . Déterminons $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|_2$. Puisque, pour tout $k \geq 1$, $x^{(k)} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots) \in F$ nous avons forcément

$$\|x - x^{(k)}\|_2 \geq d(x, F)$$

or $\|x - x^{(k)}\|_2^2 = \sum_{n \geq k+1} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ donc $d(x, F) = 0$. Cet infimum n'est pourtant jamais atteint car s'il l'était pour un certain $y \in F$ nous devrions avoir

$$\|x - y\|_2 = d(x, F) = 0 \iff x = y$$

ce qui est absurde puisque $x \notin F$. Il n'est donc pas possible d'obtenir un projeté orthogonal de x sur F bien qu'il soit possible d'approcher x par des éléments de F . L'hypothèse F fermé est donc cruciale en dimension infinie.

Voyons maintenant de quelle manière il est possible de généraliser la notion de base d'un espace vectoriel.

13.1.2 Base Hilbertienne

Comme le lecteur l'aura déjà constaté en algèbre linéaire, certains choix de base¹¹ d'un espace vectoriel permet de simplifier grandement l'étude d'un problème. Nous allons voir ce qu'il est possible de faire dans le contexte des espaces de Hilbert, lesquels peuvent être de dimension infinie limitant de fait l'approche purement algébrique. Dans ce qui suit H désignera donc un espace de pré-hilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

11. Une base formée des vecteurs propres d'un endomorphisme dans un contexte de diagonalisation par exemple ou le choix d'une base orthonormée directe dans le contexte des isométries de \mathbb{R}^n .

Définition 13.1.4. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H indexé par un ensemble I . Nous dirons que la famille est orthonormée si

$$\|u_i\| = 1 \quad \text{pour tout } i \in I \quad ; \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \text{pour tout } i, j \in I, \quad i \neq j.$$

Voyons des exemples de familles orthonormées.

Exemple 13.1.3 (Famille orthonormée). 1. Dans \mathbb{R}^n , muni du produit scalaire euclidien, la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ e_i à toutes ses coordonnées nulles sauf la i ème, est une base orthonormée.

2. Dans $L^2([-\pi, \pi], dx)$ muni de son produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

La famille constituée des fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}$, $x \mapsto \sin(nx)$, $x \mapsto \cos(nx)$ pour tout $n \geq 1$ est une famille orthonormée.

3. Dans $L^2([-1, 1], dx)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

La famille constituée des fonctions $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ où $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$ pour tout $n \geq 1$ est une famille orthonormée. Il s'agit des polynômes orthogonaux de Legendre.

4. Dans $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx.$$

La famille constituée des fonctions $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$ où $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x^2})$ pour tout $n \geq 1$ est une famille orthonormée. Il s'agit des polynômes orthogonaux d'Hermite.

5. Dans $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-x} dx)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x} dx.$$

La famille constituée des fonctions $\phi_n(x) = \frac{1}{n!} L_n(x)$ où $L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x})$ pour tout $n \geq 1$ est une famille orthonormée. Il s'agit des polynômes orthogonaux de Laguerre.

Remarque. Nous rappelons au lecteur (cf. []) qu'étant donnée une base de \mathbb{R}^n , le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet d'en extirper une base orthonormée. L'exemple précédent met en évidence des espaces de fonctions dont les produits scalaires paraissent similaires, nous invitons déjà le lecteur à réfléchir comment rassembler tous ces exemples dans le même cadre formel; nous développerons certains aspects liés à ces polynômes orthogonaux de L^2 plus tard dans le chapitre.

Les relations d'orthogonalités permettent de généraliser le théorème de Pythagore.

Proposition 13.11 (Pythagore généralisé). *Soit $(u_i)_{i \in I}$ avec I un ensemble **fini**. Nous avons alors l'équivalence suivante*

$$\left\| \sum_{i \in I} u_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|u_i\|^2 \iff u_i \perp u_j \quad \forall i, j \in I, i \neq j.$$

Remarque. En particulier, ce résultat montre qu'une famille orthonormée de vecteurs est une famille libre. Ce résultat n'est plus satisfait si H est un espace pré-hilbertien **complexe** car le produit scalaire est alors une forme *sesquilinéaire* symétrique (cf. []).

Il est à noter que la proposition précédente implique qu'un **nombre fini** de vecteurs de H . Il est naturel de chercher à étendre ceci à une famille quelconque de vecteurs. Ceci va alors soulever la question suivante : si I est un ensemble d'indice quelconque et $(u_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I , que signifie

$$\sum_{i \in I} u_i \quad ?$$

Nous devons procéder à un aparté pour clarifier ceci avant de poursuivre notre exposition.

Famille Sommables

Plaçons nous dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ que nous supposons complet¹² et considérons une famille de vecteurs $(u_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble I quelconque.

Définition 13.1.5 (Famille sommable). *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .*

1. *Nous dirons que cette famille est sommable dans E s'il existe $S \in E$ (la somme de la famille) vérifiant la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $I_0 \subset I$ un sous-ensemble fini tel que pour tout sous ensemble J contenant I_0 , nous avons*

$$\left\| S - \sum_{i \in J} u_i \right\| \leq \epsilon \tag{13.1.5}$$

2. *Nous dirons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est absolument sommable si la famille de nombres réels positifs $(\|u_i\|)_{i \in I}$ est sommable.*

Remarque. 1. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que lorsque S existe, elle est unique. La définition précédente indique également que l'ordre de sommation n'intervient pas.

2. Le fait d'être absolument sommable s'apparente à une généralisation de la convergence normale d'une famille quelconque de vecteurs¹³ : si $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E alors

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \|u_i\| < \infty \iff \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i < \infty.$$

Par analogie, nous laissons au lecteur le soin de montrer que, lorsque E est complet, une famille absolument sommable est sommable (cf.[?]).

12. Bien que cette hypothèse ne soit pas nécessaire pour la définition d'une famille sommable, nous la faisons tout de même car cela sera vérifié dans les exemples que nous rencontrerons ; nous précisons à chaque fois à quel endroit cette hypothèse intervient de manière cruciale ; le lecteur trouvera plus de détails dans [].

13. que nous avons étudié dans (12.2.3)

3. Nous pourrions avoir l'impression que la notion d'absolument sommable dépend de la norme employée, ce n'est pas le cas : pour toute norme équivalente une famille sommable sera encore sommable. Il s'agit bien d'une notion topologique.

Il est intéressant de constater qu'il est toujours possible de restreindre l'étude des familles sommables à des ensembles d'indices I au plus dénombrable.

Lemme 13.12. *Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable alors $A = \{i \in I; u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable (i.e. $S = \sum_{i \in I} u_i < +\infty$) et, pour tout $k \geq 1$, considérons $A_k = \{i \in I \mid \|u_i\| \geq 2^{-k}\}$. Montrons à présent que A_k est un ensemble fini. Pour cela, choisissons δ tel que $0 < \delta < 2^{-k-1}$, puisque la famille est sommable, il existe I_0 un sous ensemble fini de I tel que pour tout sous ensemble fini $J \subset I$ contenant I_0 , nous ayons

$$\left\| \sum_{j \in J} u_j - S \right\| \leq \delta.$$

Nous affirmons alors que $A_k \subset I_0$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe alors $i \in A_k$ tel que $i \notin I_0$ et en choisissant $J = I_0 \cup \{i\}$ nous en déduisons que

$$\delta \geq \left\| \sum_{j \in J} u_j - S \right\| = \left\| u_i + \sum_{j \in I_0} u_j - S \right\| \geq \|u_i\| - \left\| \sum_{j \in I_0} u_j - S \right\| \geq \|u_i\| - \delta$$

en utilisant l'inégalité triangulaire dans la première minoration. Ceci entraîne que $\|u_i\| \leq 2\delta < 2^{-k}$ ce qui est absurde puisque $i \in A_k$. Ceci montre que, pour tout $k \geq 1$, A_k est un ensemble fini.

Pour conclure, il suffit d'observer que $\cup_{k \geq 1} A_k = A$ puisque, par séparabilité de la norme, $\|u\| = 0 \iff u = 0$. A est donc la réunion dénombrable d'ensembles finis, il s'agit donc d'un ensemble au plus dénombrable. \square

Il est possible de démontrer¹⁴ de nombreuses propriétés des familles sommables (cf. []):

- l'ensemble des familles sommables est un espace vectoriel (i.e. propriété de stabilité par combinaison linéaire),
- la réunion de deux familles sommables $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_j)_{j \in J}$ est encore sommable.
- ...

Il est également possible de préciser le fait qu'une famille sommable peut-être calculée sans prêter attention à l'ordre des termes : si I s'écrit comme une réunion disjointe $I = \cup_{\alpha \in A} I_\alpha$ alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{i \in I_\alpha} u_i \right).$$

En particulier, puisque nous pouvons nous « restreindre » à des familles dénombrables, nous avons le Lemme suivant

14. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier ceci.

Lemme 13.13. *Si I est un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de vecteurs de E alors, pour toute énumération $I = \{i_0, i_1, \dots, i_n, \dots\}$ de I nous avons*

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_{i_n} < +\infty$$

Remarque. Ceci montre à nouveau qu'une famille sommable ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Démonstration. soit $S = \sum_{i \in I} u_i$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $I_0 \subset I$ vérifiant la relation (13.1.5). En outre, puisque I_0 est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel

$$I_0 \subset \{i_0, \dots, i_N\}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, l'ensemble $J = \{i_0, \dots, i_n\}$ contient I_0 d'où

$$\left\| S - \sum_{k=0}^n u_{i_k} \right\| = \left\| S - \sum_{j \in J} u_j \right\| < \epsilon.$$

□

Il paraît nécessaire de voir ce qu'il advient de la notion de familles sommables dans certains cas particuliers afin de forger notre intuition sur cette notion. Considérons, dans un premier temps, des familles de nombres positifs avant de revenir à notre contexte d'espace de Hilbert.

Lemme 13.14. *Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombre **réels positifs** est sommable si et seulement si*

$$m := \sup_{J \subset I, J \text{ fini}} \sum_{j \in J} u_j < +\infty.$$

Dans ce cas, $\sum_{i \in I} u_i = m$.

Démonstration. Supposons que la famille soit sommable de somme S (laquelle est forcément positive). En utilisant la définition 13.1.5 avec $\epsilon = 1$, nous savons qu'il existe un ensemble fini I_0 tel que tout pour ensemble fini $J \subset I$ nous avons

$$\left| S - \sum_{j \in J \cup I_0} u_j \right| \leq 1.$$

Les termes étant tous positifs, ceci entraîne que $\sum_{j \in J} u_j \leq \sum_{j \in J \cup I_0} u_j \leq S + 1$ d'où, en passant au supremum sur I , nous obtenons $m \leq S + 1$.

Réciproquement, supposons que m soit fini. Par définition du supremum, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $I_0 \subset I$ un ensemble fini tel que

$$\sum_{j \in I_0} u_j > m - \epsilon.$$

Considérons à présent $J \subset I$ un sous-ensemble fini contenant I_0 , alors, puisque les termes sont positifs,

$$m - \epsilon < \sum_{j \in I_0} u_j \leq \sum_{j \in J} u_j \leq m.$$

En conséquence, $\left| m - \sum_{j \in J} u_j \right| < \epsilon$, la famille est donc sommable. □

Remarque. 1. Ce résultat nous permet de retrouver un phénomène connu concernant la convergence des séries numériques de termes positifs : une série (de termes positifs) bornée converge vers son supremum.

2. Le lecteur aura pu aussi constater une certaine similarité entre ce que nous venons d'établir pour les familles sommables et la construction de l'intégrale de Lebesgue :

- (a) commencer par des sommes finies,
- (b) prendre un supremum.

D'ailleurs, si I est muni de la mesure de comptage, ces deux notions coïncident. Il n'est donc pas surprenant que nous puissions traiter les familles sommables de nombres réels (de signe quelconque) en séparant partie positive et négative¹⁵. Ceci permet alors d'établir (cf. [?]) qu'une famille de nombres **réels** $(u_j)_{j \in J}$ est sommable si et seulement si la somme converge absolument :

$$\sum_{j \in J} |u_j| < +\infty.$$

En fait, ce résultat n'est pas seulement valable pour des nombres réels. Il l'est aussi pour des familles sommables de vecteurs appartenant à n'importe quel espace vectoriel normé E de dimension finie¹⁶.

Cette équivalence est d'autant plus rassurante qu'il est aussi possible d'établir une équivalence entre la **convergence absolue d'une série numérique** et le fait qu'elle soit **commutativement convergente**¹⁷ montrant, une fois de plus, que l'ordre de sommation n'a pas d'importance dans le cadre des familles sommables ; nous renvoyons le lecteur vers [] pour plus de détails à ce sujet.

3. A titre informatif, nous signalons au lecteur l'existence du résultat suivant (cf. [?]), du à Riemann à propos des séries semi-convergente. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est semi-convergente : i.e. il existe $l \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{mais} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = +\infty$$

alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ il existe une permutation σ de \mathbb{N} telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} = \alpha.$$

Dit autrement, il est toujours possible de réordonner une série semi convergente pour la faire converger vers une valeur prescrite au préalable : l'ordre de sommation est donc essentiel. Voyons un exemple illustrant ce phénomène. La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{1+n}$ est

15. de la même manière que nous avons défini l'intégrale d'une fonction mesurable de signe quelconque afin de définir l'espace L^1

16. L'argument à utiliser est le suivant : il est toujours possible d'identifier E à \mathbb{R}^n muni de la norme l^1 et de travailler coordonnées par coordonnées (cf. [?]).

17. peu importe l'ordre des termes, la série converge toujours vers la même valeur

convergente (vers $\ln 2$) mais ne converge pas absolument. Voyons ce qui se produit après un réarrangement :

$$\begin{aligned} S_\sigma &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) \end{aligned}$$

Autrement dit $S_\sigma = \frac{\ln 2}{2}$.

Cet aparté concernant les familles sommables étant terminé, nous pouvons revenir à notre étude des espaces pré-hilbertiens et voir ce que signifie être une famille sommable dans ce contexte. Rappelons qu'il est toujours possible, d'après le Lemme 13.12 de se restreindre à des familles au plus dénombrables d'éléments.

Tout d'abord, nous pouvons regarder à quelle condition une série converge dans un espace de Hilbert.

Proposition 13.15. *Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de vecteurs, deux à deux orthogonaux, d'un espace de Hilbert. La série de vecteur $\sum_k u_k$ converge dans H si et seulement si $\sum_{k \geq 0} \|u_k\|^2 < +\infty$. Dans ce cas,*

$$\left\| \sum_{k \geq 0} u_k \right\|^2 = \sum_{k \geq 0} \|u_k\|^2$$

Remarque. L'égalité ci dessus s'apparente finalement à une version généralisée (avec une **somme dénombrable** de vecteurs) de l'identité intervenant dans le théorème de Pythagore. Il est à noter que cette proposition laisse devenir une relation importante existant entre un espace de Hilbert et $l^2(\mathbb{N})$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, posons

$$V_n = \|u_0\|^2 + \dots + \|u_n\|^2 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad U_n = u_0 + \dots + u_n \in H.$$

Observons que, pour tout $0 \leq m < n$,

$$U_n - U_m = u_{m+1} + \dots + u_n$$

et le théorème de Pythagore 13.11 entraîne que

$$\|U_n - U_m\|^2 = \|u_{m+1}\|^2 + \dots + \|u_n\|^2 = V_n - V_m.$$

Ceci montre que (U_n) est de Cauchy dans H si et seulement si (V_n) est de Cauchy dans \mathbb{R} . Puisque (V_n) est une suite croissante de nombre positifs, dire qu'elle est de Cauchy revient à dire qu'il s'agit d'une suite bornée. Autrement dit, la série de vecteurs orthogonaux $\sum_k u_k$ converge dans H si et seulement si $\sum_{k \geq 0} \|u_k\|^2 < +\infty$. En outre, par continuité de la norme,

$$\left\| \sum_{k \geq 0} u_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|U_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \|u_k\|^2 = \sum_{k \geq 0} \|u_k\|^2$$

où l'avant dernière égalité s'obtient par orthogonalité. \square

Précisons à présent ce qu'il advient des familles sommables dans le contexte des espaces de Hilbert.

Proposition 13.16. *Si $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de H deux à deux orthogonaux alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable dans H si et seulement si $\sum_{i \in I} \|u_i\|^2 < +\infty$. Lorsque c'est le cas, nous avons*

$$\left\| \sum_{i \in I} u_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|u_i\|^2$$

et, pour toute énumération des termes non nuls de $I : \{i_0, i_1, \dots, i_n, \dots\} = I \setminus \{j \in I; u_j = 0\}$, nous avons $\sum_{n=0}^{\infty} u_{i_n} = \sum_{i \in I} u_i$.

Remarque. Ce résultat met en évidence que l'ordre de sommation d'une série convergente dans un espace de Hilbert n'a aucune importance.

Démonstration. Supposons que $\sum_{i \in I} \|u_i\|^2 < +\infty$, nous devons alors justifier l'existence d'un élément $S \in H$ vérifiant la relation (13.1.5). Puisqu'il s'agit de réels positifs, nous savons (d'après le Lemme 13.14) que

$$\sum_{n \geq 0} \|u_{i_n}\|^2 = \sup_{J \subset I, J \text{ fini}} \sum_{j \in J} \|u_j\|^2 = \sum_{i \in I} \|u_i\|^2 < +\infty.$$

La proposition 13.15 nous permet alors de définir S de la manière suivante :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_{i_n} \in H \quad \text{avec} \quad \|S\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|u_{i_n}\|^2 = \sum_{i \in I} \|u_i\|^2.$$

Il reste à montrer que S vérifie bien la relation (13.1.5). Pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, posons

$$S(J) = \sum_{j \in J} u_j \in H.$$

Soit $\epsilon > 0$, considérons l'ensemble fini $J_0 = \{i_0, \dots, i_N\}$ où N est choisi suffisamment grand de sorte que le reste de la série convergente soit aussi petit que souhaité :

$$\sum_{j \notin J_0} \|u_j\|^2 = \sum_{n > N} \|u_{i_n}\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Dans ce cas, $S = S(J_0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} u_{i_n}$ d'où

$$\|S - S(J_0)\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_{i_n} \right\|^2 = \sum_{n > N} \|u_{i_n}\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4}$$

où la dernière égalité s'obtient grâce à la proposition 13.15. En conséquence, $\|S - S(J_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Si maintenant J est un sous ensemble fini de I contenant J_0 , celui-ci est forcément obtenu en

ajoutant des éléments i_{n_1}, \dots, i_{n_p} (pour un certain $p \in \mathbb{N}$) à J_0 et il est possible de supposer (quitte à renuméroter) que $N < n_1 < n_2 < \dots < n_p$. C'est pourquoi ces indices sont tels que

$$S(J) - S(J_0) = \sum_{j=1}^p u_{n_j}.$$

Nous en déduisons ensuite, via la proposition 13.11, que

$$\|S(J) - S(J_0)\|^2 = \sum_{j=1}^p \|u_{n_j}\|^2 \leq \sum_{n>N} \|u_{i_n}\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Ce qui entraîne que $\|S(J) - S(J_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$ et l'inégalité triangulaire nous assure que $\|S - S(J)\| < \epsilon$ pour tout sous ensemble fini $J \subset I$ contenant J_0 , la famille $(u_i)_{i \in I}$ est donc sommable.

Réciproquement, supposons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable et considérons l'ensemble fini $I_0 \subset I$ obtenu en choisissant $\epsilon = 1$ dans la relation (13.1.5). Pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, nous en déduisons que $\|S - S(A)\| \leq 1$ en choisissant $A = J \cup I_0$ donc

$$\|S(A)\| \leq \|S\| + 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in J} \|u_j\|^2 \leq \sum_{j \in A} \|u_j\|^2 = \|S(A)\|^2 \leq (\|S\| + 1)^2 < +\infty.$$

Les sommes finies sont donc bornées, cela entraîne que $\sum_{i \in I} \|u_i\|^2 < +\infty$. □

La démonstration du résultat précédent met en évidence le fait suivant : il suffit **d'établir une inégalité pour une somme finie pour obtenir automatiquement le même résultat pour une famille quelconque**. Ceci n'est pas sans rappeler¹⁸ ce que nous faisons en intégration : travailler avec des fonctions étagées pour en déduire un résultat pour des fonctions mesurables. Tout ceci nous mène naturellement au résultat suivant.

Proposition 13.17 (Inégalité de Bessel). *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille orthornormée d'un espace de Hilbert H . Alors, pour tout $x \in H$, nous avons*

$$\sum_{i \in I} |\langle u_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{13.1.6}$$

En particulier, la famille $(|\langle u_i, x \rangle|^2)_{i \in I}$ est sommable¹⁹ et $A = \{i \in I, \langle u_i, x \rangle \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque. Il faudra toutefois faire attention au fait que ce résultat ne dit rien sur la convergence de $\sum_i |\langle u_i, x \rangle|$.

Démonstration. Soit $J \subset I$ une partie finie. Puisque $(u_j)_j$ est une famille orthornormée, observons que $x - \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j$ est orthogonal à tous les vecteurs u_j pour tout $j \in J$. En conséquence, par

18. Nous permettant de renforcer à nouveau la remarque faite à la suite du Lemme 13.14.

19. Ceci implique également que la somme est inconditionnelle : sa valeur ne dépend pas du procédé de sommation.

unicité, le vecteur $\sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j$ est donc la projection orthogonale de x sur le sous-espace fermé engendré par la famille $(u_j)_{j \in J}$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j \right\|^2 + \left\| x - \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j \right\|^2 \\ &\geq \left\| \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j \right\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle x, u_j \rangle|^2 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la proposition 13.11. Puisque nous avons établi que, pour toute partie finie $J \subset I$,

$$\sum_{j \in J} |\langle x, u_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

cela implique, en passant au supremum, que $\sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. L'inégalité de Bessel est donc établie. Pour la deuxième partie de l'énoncé, il suffit d'utiliser les résultats établis pour les familles sommables. \square

Remarque. Au risque d'être redondant, insistons une dernière fois : dans la démonstration il a suffi de traiter les sous-ensembles finis avant de passer au supremum ; un procédé analogue a déjà été employé dans la théorie de la mesure en établissant les résultats pour des fonctions étagées puis en passant également au supremum.

Il semble intéressant de s'interroger sur l'inégalité de Bessel : à quel moment cette inégalité devient-elle une égalité ? Quelle condition doit vérifier la famille orthonormée $(u_i)_{i \in I}$ pour que cela soit le cas ?

Comme nous allons le voir, cette question va nous amener à étudier l'analogue, en dimension infinie, des sous-espaces vectoriels engendré par une famille de vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie. La notion associée est celle de *de famille totale*, laquelle permettra de définir la notion de base hilbertienne généralisant la notion de base (algébrique) d'un espace vectoriel rencontrée en dimension finie.

Définition 13.1.6 (Base Hilbertienne). *Soit $(x_j)_{j \in J}$ une famille de H .*

1. *La famille $(x_j)_{j \in J}$ est une famille totale si l'espace vectoriel engendré par ces éléments est dense dans H .*
2. *Nous dirons que la famille $(x_j)_{j \in J}$ est une base hilbertienne de H si c'est une famille orthonormée totale.*

Remarque. Prenons le temps de différencier une base algébrique (en dimension finie donc) d'une base hilbertienne. Si (e_1, \dots, e_n) est une base d'un espace vectoriel réel E de dimension n alors, pour tout élément $x \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne d'un espace de Hilbert réel H alors, pour tout $x \in H$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| = 0.$$

La propriété de densité de la famille $(e_i)_{i \in I}$ implique que tout élément $x \in H$ peut s'obtenir comme **la limite** d'une série convergente dans H .

Exemple 13.1.4. Les familles orthornormées de l'exemple (13.1.3) sont en fait des bases hilbertiennes de l'espace associé.

Le lecteur l'aura constaté, le point délicat devient alors de vérifier que l'espace vectoriel engendré par une famille orthornormée est dense. Le corollaire 13.10 est un premier moyen pour établir ceci : il suffit de montrer que le seul vecteur orthogonal à tous les éléments de la famille est le vecteur nul. Nous allons voir ci-dessous, qu'il est possible de faire mieux encore et de caractériser précisément les bases hilbertiennes.

Théorème 13.18 (Parseval). *Soient $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert et $(x_j)_{j \in J}$ une famille orthornormée de H (i.e. $\|x_j\| = 1$ pour tout $j \in J$), les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $(x_j)_{j \in J}$ est une base hilbertienne de H .
2. Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$.
3. Pour tout $x, y \in H$, nous avons l'identité

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle y, x_j \rangle$$

En particulier, nous avons l'égalité (dite de Parseval)

$$\|x\|^2 = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle^2. \quad (13.1.7)$$

Remarque. Lorsqu'elles sont satisfaites, les assertions ci-dessus montrent que l'application

$$x \mapsto (\langle x, x_j \rangle)_{j \in J}$$

est un isomorphisme isométrique de H sur l'espace de Hilbert $l^2(J)$ des familles de scalaires indexées par J et de carrées sommables.

Démonstration. Procédons de manière circulaire.

1. (1) \Rightarrow (2). Soit $y = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$ (cette quantité est bien finie d'après l'inégalité de Bessel (13.1.6)). Observons ensuite que, pour tout $j \in J$, par linéarité, nous avons

$$\langle y, x_j \rangle = \sum_{k \in J} \langle x, x_k \rangle \langle x_k, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle$$

puisque la famille $(x_j)_{j \in J}$ est orthornormée. En conséquence, $x - y \perp x_j$ pour tout $j \in J$ d'où $x - y = 0$ comme $(x_j)_{j \in J}$ est une base hilbertienne.

2. (2) \Rightarrow (3). Si $x = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$ et $y = \sum_{k \in J} \langle y, x_k \rangle x_k$ alors les propriétés d'orthogonalité nous assure que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle y, x_j \rangle.$$

La formule de Parseval s'obtient en choisissant $y = x$.

3. (3) \Rightarrow (1). Utilisons l'identité de Parseval en remplaçant x par x_j pour tout $j \in J$. Cela donne :

$$\begin{aligned} \|x_j\|^2 &= \sum_{k \in J} \langle x_j, x_k \rangle^2 \\ &= \|x_j\|^4 + \sum_{k \in J, k \neq j} \langle x_j, x_k \rangle^2. \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à $\|x_j\|^2(1 - \|x_j\|^2) = \sum_{k \in J, k \neq j} \langle x_j, x_k \rangle^2 \iff \sum_{k \in J, k \neq j} \langle x_j, x_k \rangle^2 = 0$ puisque $\|x_j\| = 1$ pour tout $j \in J$. En conséquence $\langle x_j, x_k \rangle = 0$ pour tout $k \neq j$: les vecteurs sont deux à deux orthogonaux, la famille est donc orthonormée. Considérons à présent $x \in H$ tel que $x \perp x_j$ pour tout $j \in J$, l'identité de Parseval nous assure alors que

$$\|x\|^2 = 0 \iff x = 0.$$

La famille $(x_j)_{j \in J}$ est donc une base hilbertienne de H .

□

Remarque. A titre de comparaison, rappelons qu'en dimension finie il existait des résultats très pratiques pour savoir si une famille de vecteurs était une base de l'espace considéré. Si E est de dimension n et $(e_i)_{i \in I}$ désigne une famille finie de vecteurs, nous avons les assertions équivalentes :

- $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre et génératrice de E ;
- $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre de E et $\text{Card}(I) = n$;
- $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et $\text{Card}(I) = n$.

Nous avons répondu à de nombreuses questions théoriques et l'exposition que nous venons de faire montre que les espaces de Hilbert sont une généralisation très intéressante, en dimension infinie, de \mathbb{R}^n muni du produit scalaire euclidien. Il est temps de voir de quelle manière tout ceci peut se mettre en œuvre pour résoudre des problèmes concrets ne pouvant être traités en dimension finie.

13.2 Séries de Fourier

Dans ce tout qui suit (sauf mention explicite du contraire), nous allons travaillerons avec des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que nous supposons 2π -périodique : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

L'ensemble des fonctions continues et 2π -périodique sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} sera noté $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Définition 13.2.1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et (a_n) et (b_n) des coefficients réels, nous appelons polynôme trigonométrique (réel) toute fonction pouvant s'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sous la forme

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \quad (13.2.1)$$

Remarque. L'égalité (13.2.1) peut se réécrire, à l'aide des formules d'Euler, sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=-N}^N c_n e^{inx} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

où $c_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

L'écriture précédente impose une excursion dans \mathbb{C} , nous allons donc procéder à quelques légers ajustements concernant le produit scalaire afin de prendre ceci en compte. Soient $f, g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, leur produit scalaire est donné par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (13.2.2)$$

où $\bar{z} = a - ib$ désigne le conjugué de $z = a + ib \in \mathbb{C}$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est alors à valeurs dans \mathbb{C} et vérifie les propriétés suivantes :

1. Si g est fixée, $f \mapsto \langle f, g \rangle$ est linéaire.
2. Si f est fixée, $g \mapsto \langle f, g \rangle$ est semi-linéaire : pour toutes fonctions $g, h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons

$$\langle f, g + ch \rangle = \langle f, g \rangle + \bar{\lambda} \langle f, h \rangle.$$

3. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dite hermitienne : pour toutes fonctions $f, g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

4. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive : pour toute fonction $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\langle f, f \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle f, f \rangle = 0 \quad \iff \quad f = 0.$$

En particulier, il est possible de définir $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ et de montrer qu'il s'agit d'une norme.

Ces quelques modifications permettent de reprendre, modifiant mutatis mutandis certains passages, l'essentiel²⁰ de ce qui a été fait précédemment (dans les espaces de Hilbert) sans encombre. Le lecteur pourra se référer à [] au besoin.

Exemple 13.2.1. Soit (ϕ_k) la suite définie par $\phi_n(x) = e^{ikx}$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Il s'agit d'une base hilbertienne de $L^2([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par (13.2.2). Pour vérifier qu'il s'agit d'une famille orthonormée, il suffit d'observer que

20. Nous invitons toutefois le lecteur à la prudence et à la réflexion. Par exemple, l'équivalence dans le théorème de Pythagore 13.11 n'est plus vérifiée. Nous avons seulement l'implication suivante : soit H un espace préhilbertien complexe, si $z, z' \in H$ sont orthogonaux alors $\|z + z'\|^2 = \|z\|^2 + \|z'\|^2$. La réciproque implique seulement que $\text{Re}\langle z, z' \rangle = 0$ où Re désigne la partie réelle d'un nombre complexe.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (13.2.3)$$

Le fait qu'il s'agit d'une base hilbertienne sera obtenu via le Théorème de Fejér 13.28 que nous établira plus tard dans ce chapitre.

La principale question qui va nous occuper dans cette section sera de chercher à décomposer une fonction 2π -périodique suivant cette base hilbertienne (donnant ainsi une décomposition en polynôme trigonométrique). A cet effet, observons le fait suivant : imaginons que nous ayons à disposition un polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=-N}^N c_n e^{inx} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}. \quad (13.2.4)$$

Comment faire pour trouver, en fonction de f , une expression des coefficients c_n ? Pour cela, il convient d'utiliser le produit scalaire et l'observation (13.2.3) : en multipliant (13.2.4) par e^{-imx} avec $m \in \mathbb{Z}$ nous en déduisons, après simplification, que

$$c_m = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx & \text{si } |m| \leq N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette observation nous permet alors de définir les quantités suivantes.

Définition 13.2.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique.

1. Les coefficients de Fourier²¹, notés $c_n(f)$, de la fonction f sont donnés par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

2. Les sommes partielles, notées $S_n(f)$, de la série de Fourier associée à f correspond à

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_n(f) e^{inx} \quad \text{pour tout } x \in [-\pi, \pi].$$

3. La série de Fourier, notée $S(f)$, associée à f est donnée par

$$S(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad \text{pour tout } x \in [-\pi, \pi].$$

Remarque. Les coefficients de Fourier ne sont rien d'autres que des produits scalaires entre f et la base hilbertienne $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}} : c_n(f) = \langle f, \phi_n \rangle$. Notons que rien n'est supposé, a priori, quant à la convergence de la série de Fourier $S(f)$.

21. Par rapport à la base hilbertienne $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ de $[-\pi, \pi]$.

Plusieurs questions se posent :

- A quelles conditions $S_n(f)$ converge-t-elle? En quel sens? S'agit-il de convergence simple? de convergence uniforme? d'un autre mode de convergence?
- Quels liens existe-t-il entre une éventuelle limite (de $S_n(f)$) et la fonction f de départ?
- Est-ce que la série de Fourier d'une fonction f caractérise la fonction? Autrement dit, est-ce que la connaissance des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ permet de reconstruire la fonction f ?

Dans un premier temps, nous allons répondre à ces questions en utilisant le cadre des espaces de Hilbert que nous avons développé précédemment. C'est l'objet de la section suivante.

13.2.1 Convergence dans $L^2([- \pi, \pi])$ - Méthodes hilbertiennes

Comme nous allons l'observer, les informations que nous allons obtenir (i.e. le mode de convergence) concernant la série de Fourier associée à une fonction f donnée va dépendre de l'espace considéré. Débutons par l'espace de Hilbert $L^2([- \pi, \pi])$ muni de son produit scalaire (13.2.2). Certains détails seront omis et nous renvoyons le lecteur vers [] si besoin.

L'essentiel des résultats que nous allons obtenir réside dans le fait suivant : la famille $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (définie dans l'exemple (13.2.1)) est une base hilbertienne de $L^2([- \pi, \pi])$. Ceci permet d'utiliser conjointement les théorèmes 13.18, 13.9 pour en déduire le résultat suivant.

Théorème 13.19. *Si $f \in L^2([- \pi, \pi])$ alors*

1. $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) \phi_k$ converge vers f dans $L^2([- \pi, \pi])$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0.$$

2. L'égalité de Parseval devient

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2. \quad (13.2.5)$$

3. Pour tout polynôme trigonométrique de la forme $P_n = \sum_{k=-n}^n \gamma_k \phi_k$ avec $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes alors

$$\|S_n(f) - f\|_2 \leq \|P_n - f\|_2.$$

L'égalité n'ayant lieu que lorsque $P_n = S_n(f)$.

Remarque. 1. Il est usuelle de parler de parler de *convergence en moyenne quadratique* pour désigner la convergence dans $L^2([- \pi, \pi])$. Insistons sur le fait qu'il faut plutôt considérer les fonctions ϕ_n comme des vecteurs (définis modulo un ensemble de mesure nulle) de $L^2([- \pi, \pi])$, n'ayant un sens que lorsqu'elles se retrouve intégrées, et non pas comme des fonctions réelles définies pour n'importe quel nombre $x \in [- \pi, \pi]$ ²² D'ailleurs, si $x \in [- \pi, \pi]$ est fixé, nous ne pouvons a priori rien dire quant à la convergence (simple ou uniforme) de la série de fonctions $S_n(f)(x)$.

²² Par exemple, $1_{\mathbb{Q} \cap [- \pi, \pi]}$ est identique (dans $L^2([- \pi, \pi])$) à la fonction nulle alors que ponctuellement ces fonctions sont différentes.

2. Cette identité montre que l'application $\mathcal{F}_{per} : L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ définie $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est isomorphisme isométrique.
3. Le dernier point indique que la série de Fourier $S_n(f)$ est la meilleure approximation de f sur $F = \text{Vect}(\phi_{-n}, \dots, \phi_n)$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.
4. Notons également que l'inégalité de Bessel (13.1.6) nous donnait un moyen alternatif pour obtenir des informations sur la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ d'une fonction de carré intégrable, puisque

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 < +\infty. \quad (13.2.6)$$

En particulier, nous en déduisons que nécessairement $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$ comme tout terme général d'une série convergente; ce résultat fait songer au Lemme de Riemann-Lebesgue 12.42 qui s'apparente à une version continue de ce que nous sommes entrain d'étudier, nous reviendrons là dessus dans un chapitre ultérieur.

En pratique, il est souvent fréquent que la fonction étudiée vérifie des propriétés de parités. Dans ce cas, il n'est pas toujours utile de calculer $c_n(f)$ mais plutôt de passer par les coefficients de Fourier réels : si $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Dans ce cas, l'expression de la série de Fourier devient

$$S_n(f)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) \quad \text{pour tout } x \in [-\pi, \pi].$$

et l'identité de Parseval s'écrit un peu différemment (car la famille $(1, \cos(nx), \sin(nx))_{n \geq 1}$ n'est par normée) :

$$\|f\|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

L'avantage d'utiliser les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ à la place des coefficients $c_n(f)$ réside dans le fait suivant :

- si f est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$,
- si f est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Voyons un exemple d'application de tout ceci.

Exemple 13.2.2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \pi$ si $0 < x < \pi$. Nous prolongeons cette fonction sur $[-\pi, 0]$ de sorte à obtenir une fonction impaire et prolongeons ensuite la fonction obtenue par 2π -périodicité sur \mathbb{R} . Dans ce cas,

$$a_n(f) = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad b_n(f) = -\frac{2}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

La formule de Parseval nous donne alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} |b_n(f)|^2 \iff \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il est possible de proposer un cadre plus abstrait permettant de rassembler les séries de Fourier historiques (celles impliquant les polynômes trigonométriques) avec celles obtenues via d'autres bases hilbertiennes. Nous allons développer ceci dans un court aparté.

Methodes hilbertiennes et polynômes orthogonaux

Dans les sections précédentes, nous avons rencontré de nombreuses bases hilbertiennes (cf. exemple 13.1.3). Il est naturel de vouloir adapter ce que nous venons de faire avec les polynômes trigonométriques à ces cas de figures. Voici quelques mots à ce sujet permettant de satisfaire la curiosité du lecteur. Plus plus de détails, nous renvoyons à [].

Nous supposons que $I =]a, b[$ est un intervalle (éventuellement non borné) et w est une fonction continue et positive sur I telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_I |x|^n w(x) dx < +\infty.$$

Nous nous intéressons alors à $H = L^2(I, w(x)dx)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur I telles que

$$\int_I |f|^2 w(x) dx < +\infty.$$

Cet espace peut-être équipé du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_w = \int_I f(x) \overline{g(x)} w(x) dx.$$

Il s'agit d'un espace de Hilbert (affecté du poids w) dans lequel la famille $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, le procédé de Gram-Schmidt (cf. []) permet alors de construire une suite orthonormée de polynômes (p_n) . Il est naturel alors de se demander si la famille (p_n) obtenue forme une base hilbertienne de H (i.e. en montrant que $\text{Vect}(p_n; n \in \mathbb{N}) = H$). Pour établir ceci, cela va dépendre du fait que I soit borné ou non :

1. Supposons que $I =]a, b[$ soit borné et remarquons que $\text{Vect}(p_n; n \in \mathbb{N}) = \mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Nous devons établir²³ que, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $f \in H$, il existe $P \in \mathcal{P}$ tel

$$\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

D'après la proposition 12.41), nous savons que les fonctions continues (à support compact) sont denses dans H . Il existe donc $g \in C^0([a, b])$ telle que

$$\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

De plus, d'après le théorème de Weierstrass 8.24, nous savons que l'ensemble des polynômes est dense dans $C^0([a, b])$ pour la norme de la convergence uniforme : il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que

$$\|g - P\|_\infty < \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}}.$$

23. Une démonstration alternative consiste à supposer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle f, p_n \rangle_w = 0$ alors $f = 0$ presque partout. Pour cela, il est possible d'utiliser les arguments présentés dans le théorème des moments 8.6.1.

Pour conclure, il nous suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\|f - P\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \\ &< \epsilon + \sqrt{b-a}\|g - P\|_\infty \\ &< 2\epsilon.\end{aligned}$$

2. Lorsque I n'est pas borné, il faut faire appel à des propriétés des fonctions holomorphes et de la transformée de Fourier. Nous détaillerons ceci plus tard dans un autre chapitre.

Le cadre que nous venons de fixer nous permet de considérer les familles de polynômes orthogonaux rencontrés dans déjà l'exemple 13.1.3.

- Exemple 13.2.3.** 1. Si $I =]-1, 1[$ et $w(x) = 1$ pour tout $x \in I$, nous trouvons la famille des polynômes de Legendre.
2. Si $I =]0, +\infty[$ et $w(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in I$, nous trouvons la famille des polynômes de Laguerre (L_n).
3. Si $I =]-\infty, +\infty[$ et $w(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \in I$, nous trouvons la famille des polynômes d'Hermite (H_n).

Remarque. Nous reverrons ces polynômes dans le contexte de la décomposition spectrale d'opérateurs différentiels.

Il se trouve que les polynômes obtenus vérifient de nombreuses propriétés. En particulier des relations de récurrences (par exemple la formule de Christoffel-Darboux). De la même manière, l'étude des zéros des polynômes orthogonaux permet d'obtenir des formules de quadratures (i.e. des formules permettant de calculer des intégrales) intéressantes : il s'agit des formules de Gauss-Jacobi (lesquelles utilisent les polynômes d'interpolation de Lagrange). En particulier, nous invitons le lecteur à consulter le théorème de Markov donc la démonstration repose sur ces idées. Nous faisons le choix de ne pas développer ces différents aspects et de renvoyer le lecteur vers [?] pour un exposé détaillé sur ces notions.

Voyons à présent ce qui se produit si ni changeons d'espace fonctionnel.

13.2.2 Séries de Fourier dans $L^1([-\pi, \pi])$

Les méthodes hilbertiennes exposées dans la section précédente montrent que la compréhension des séries de Fourier est relativement aisée lorsque $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Que se passe-t-il si nous supposons seulement que $f \in L^1([-\pi, \pi])$? Il est toujours possible de définir la suite des coefficients de Fourier ($c_n(f)$) ainsi que la série de Fourier correspondante

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} \quad \text{avec } x \in [-\pi, \pi].$$

Cependant, ici, rien n'indique que cette série converge²⁴. Les questions suivantes apparaissent alors naturellement : si $f \in L^1([-\pi, \pi])$,

24. Alors que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $S_n(f)$ converge vers f dans $L^2([-\pi, \pi])$ d'après la formule de Parseval.

1. les coefficients de Fourier $(c_n(f))$ déterminent-ils toujours f ? Autrement dit, les coefficients de Fourier permettent-ils de reconstruire²⁵ la fonction f ?
2. $S_n(f)$ converge-t-elle? En quel sens? Quels sont les liens existant entre sa limite (lorsqu'elle existe) et la fonction initiale f ?

Commençons par la première de ces interrogations. Que pouvons-nous dire de $\mathcal{F}_{per} \Big|_{L^1([- \pi, \pi])}$ l'application qui à $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$?

Proposition 13.20 (Injectivité de \mathcal{F}_{per}). *Soient $f, g \in L^1([- \pi, \pi])$ telles que $c_n(f) = c_n(g)$ alors $f = g$ presque partout.*

Remarque. Les coefficients de Fourier caractérisent donc toujours f dans $L^1([- \pi, \pi])$.

Démonstration. Le lecteur trouvera la démonstration dans \square par exemple. \square

Il est naturel de s'interroger quand à la surjectivité de $\mathcal{F}_{per} \Big|_{L^1([- \pi, \pi])}$ soulevant alors la question de déterminer l'image de $\mathcal{F}_{per} \Big|_{L^1([- \pi, \pi])}$?

Observons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \frac{\|f\|_1}{2\pi}.$$

Ceci montre $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $l^\infty(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites bornées. Nous allons voir qu'il est possible d'être plus précis et de montrer qu'il s'agit d'un élément de $l_0(\mathbb{Z})$ les suites qui tendent vers 0 lorsque $|n| \rightarrow +\infty$.

Nous pouvons déjà obtenir ce résultat via le Lemme de Riemann-Lebesgue 12.42 mais il est instructif de présenter un autre argument qui pourra être de nouveau employé dans d'autres circonstances. Procédons alors à **un argument de troncature**.

Soit $k \in \mathbb{N}_*$ et considérons la suite définie, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f_k(x) = f(x)$ si $|f(x)| \leq k$ et $f_k(x) = 0$ sinon. Par construction, (f_k) converge simplement vers f sur $[-\pi, \pi]$. De plus,

$$|f_k| \leq |f| \in L^1([- \pi, \pi]).$$

alors, par convergence dominée, nous en déduisons que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k - f\|_1 = 0.$$

Puisque $\mathcal{F}_{per} : L^1([- \pi, \pi]) \rightarrow l^\infty(\mathbb{Z})$ est continue ceci entraîne également que $(c_n(f_k))_n$ converge vers $(c_n(f))_n$ dans $l^\infty(\mathbb{Z})$. Pour conclure, il nous reste à utiliser deux choses :

25. De la même manière que l'égalité de Parseval permet de reconstruire f , dans $L^2([- \pi, \pi])$, à partir de la suite $(c_n(f)) \in l^2(\mathbb{Z})$.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $c_n(f_k) \in l_0(\mathbb{Z})$,
- $l_0(\mathbb{Z})$ est un sous-ensemble fermé de $l^\infty(\mathbb{Z})$.

Ceci entraîne le résultat voulu : $(c_n(f))_n \in l_0(\mathbb{Z})$. Tout d'abord, puisque les fonctions $(f_k)_k$ sont bornées, il s'agit d'éléments de $L^2[-\pi, \pi]$, espace sur lequel \mathcal{F}_{per} est un isomorphisme isométrique. En conséquence, $(c_n(f_k)) \in l^2(\mathbb{Z})$ et l'inégalité de Bessel 13.2.6 implique que, pour tout $k \geq 1$,

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} |c_n(f_k)| = 0$$

donc $(c_n(f)) \in l_0(\mathbb{Z})$ puisque cet espace est fermé dans $l^\infty(\mathbb{Z})$.

Notre question initiale devient donc : $\mathcal{F}_{per} : L^1([-\pi, \pi]) \rightarrow l_0^\infty(\mathbb{Z})$ est-elle surjective ? Autrement dit, toute suite qui tend vers 0 en l'infini est-elle issue des coefficients de Fourier d'une fonction intégrable ? La réponse à cette question est négative et la démonstration utilise des outils d'analyse fonctionnelle que nous n'avons pas encore à notre disposition. Ceci sera détaillé dans un chapitre ultérieur. En attendant, voici l'énoncé d'un théorème liés aux séries de Fourier dans $L^1([-\pi, \pi])$ montrant que les choses sont plutôt délicates et qu'il existe des contre-exemples pathologiques ; le lecteur trouvera plus de détails sur ces notions dans \square .

Théorème 13.21 (Kolmogorov). *Il existe des fonctions $f \in L^1([-\pi, \pi])$ telle la série de Fourier associée diverge en tout point de \mathbb{R} .*

Ceci conclut notre étude des séries de Fourier lorsque la convergence est étudiée en moyenne (i.e. dans les espaces L^1 ou L^2). Voyons ce qu'il est possible d'obtenir pour d'autres modes de convergence.

13.2.3 Convergence dans $C_{2\pi}^0([-\pi, \pi])$

Ce qui précède montre que supposer uniquement que f est intégrable peut générer des exemples pathologiques quand à la nature de la série de Fourier associée. Nous allons donc nous placer dans un espace différent afin d'obtenir des résultats de convergence différents de ce que nous avons rencontré pour l'instant. Dans ce qui suit, $C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} et 2π -périodique et nous munissons cet espace de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Puisque $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}) \subset L^1([-\pi, \pi])$, les coefficients de Fourier $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$ sont définis comme précédemment et nous étudions la convergence des sommes partielles $S_n(f)$.

Convergence uniforme

Voyons comment obtenir un résultat de convergence uniforme d'une série de Fourier.

Théorème 13.22. *Si $f \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$ alors*

1. *Sa série de Fourier $S_n(f)$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} et*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (13.2.7)$$

Démonstration. Puisque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ converge normalement sur \mathbb{R} . En outre, si $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ alors g est continue sur \mathbb{R} . Enfin, grâce à leur continuité, f et g sont aussi des éléments de $L^2([\pi, -\pi])$ et la formule de Parseval entraîne alors que

$$\|f - g\|_2^2 = 0$$

d'où, à nouveau par continuité, $f = g$. □

Remarque. 1. S'il est seulement supposé que $f \in L^1([-\pi, \pi])$, 2π -périodique et que $(c_n(f))_n \in l^1(\mathbb{Z})$ alors le résultat précédent est toujours satisfait mais l'égalité (13.2.7) n'est valable que presque partout ; ce résultat s'obtient grâce à l'injectivité de la transformée de Fourier. En effet, la convergence normale nous permet de calculer, termes à termes, les coefficients de Fourier de g et de montrer que

$$c_n(g) = c_n(f) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

L'injectivité de \mathcal{F}_{per} (cf. proposition 13.20) nous assure alors que $f = g$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

2. L'observation précédente permet également d'établir le fait suivant si (γ_n) est une famille de nombres complexes telle que la série trigonométrique $f_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ikt}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f alors $\gamma_n = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, **si une série trigonométrique converge uniformément sur \mathbb{R} , sa somme coïncide avec sa série de Fourier.**

Exemple 13.2.4. Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|$ si $-\pi \leq x \leq \pi$. Nous prolongeons, par 2π -périodicité cette fonction sur \mathbb{R} . Le prolongement, toujours noté f est une fonction continue sur \mathbb{R} et paire. C'est pourquoi, $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et, après calculs, nous trouvons que, pour tout $k \geq 1$,

$$a_0(f) = \frac{\pi}{2}, \quad a_{2k}(f) = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k+2}(f) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Nous en déduisons alors que, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos [(2k+1)x].$$

Naturellement, nous nous demandons : que se produit-il si f est plus régulière ? Est-il possible d'obtenir de la convergence uniforme et de se passer de l'hypothèse portant sur les coefficients de Fourier $c_n(f)$?

Corollaire 13.23. *Si f est 2π -périodique et de classe $C^1(\mathbb{R})$ alors $S_n(f)$ converge uniformément et absolument vers f sur $[-\pi, \pi]$.*

Démonstration. L'idée essentielle est d'utiliser la régularité de la fonction f pour obtenir une relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$. Ceci s'obtient grâce à une intégration par partie et nous donne : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

Notons de plus que la formule de Parseval nous assure que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt < +\infty.$$

Ces deux observations vont nous permettre de contrôler la série des coefficients de Fourier de f : $|c_0(f)| < +\infty$ car f est continue et

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} |c_n(f)| &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{|n|} |c_n(f')| \\ &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} |c_n(f')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la majoration. Nous pouvons alors appliquer le théorème 13.22 pour conclure. \square

Remarque. Dans la démonstration précédente, nous observons un phénomène intéressant reliant la sommabilité des coefficients de Fourier et la régularité (grâce au théorème 6.10) de la fonction ²⁶ :

- si $(c_n(f))_n \in l^1(\mathbb{Z})$ alors $f \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$.
- si $(nc_n(f))_n \in l^1(\mathbb{Z})$ alors $f \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$.

Le dernier point se généralise facilement. Il est à noter que les réciproques sont fausses, d'où survient la question suivante : si f est régulière quelle conséquence cela a-t-il sur les coefficients de Fourier? En faisant des intégrations par parties successives dans l'expression de $c_n(f)$, nous pouvons montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi(in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-inx} dx.$$

En conséquence, pour tout $k \geq 1$, si $f \in C_{2\pi}^k(\mathbb{R})$ alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Poursuivons notre étude et voyons ce qu'il est possible d'obtenir en cherchant des hypothèses moins contraignantes (que le fait que $(c_n(f)) \in l^1(\mathbb{Z})$) afin d'obtenir des résultats de convergence simple plutôt qu'uniforme.

Convergence ponctuelle

Ici l'objectif est d'établir des conditions satisfaisantes assurant que la série de Fourier $S_n(f)(t_0)$ (avec $t_0 \in \mathbb{R}$ une valeur donnée) converge simplement sur \mathbb{R} pour ensuite chercher un lien entre la limite $S(f)(t_0)$ et $f(t_0)$.

Dans un premier temps, nous allons établir un lien entre les sommes de Fourier et l'opération de convolution. Cela permettra d'obtenir une représentation intégrale des séries de Fourier. A cet effet, observons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

26. C'est un phénomène général dans la théorie de Fourier et nous le retrouverons lorsque nous étudierons la notion de transformée de Fourier.

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt \quad (13.2.8)$$

Ceci nous pousse à définir le noyau de Dirichlet de la manière suivante.

Définition 13.2.3. Soit $n \in \mathbb{N}$, le noyau de Dirichlet est défini sur \mathbb{R} par $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$.

Remarque. Nous observons que (13.2.8) signifie finalement que $2\pi S_n(f) = f * D_n$ où $*$ est le produit de convolution (cf. définition 12.8.1).

Voyons quelles sont les propriétés du noyau de Dirichlet.

Proposition 13.24. D_n satisfait les propriétés suivantes.

1. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, nous avons l'identité

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi$

3. D_n est une fonction paire.

4. Pour tout $\eta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \leq |x| \leq \pi} D_n(t) dt = 0.$$

Remarque. Ceci est à comparer avec noyau utilisé dans la démonstration du théorème de Weierstrass 2.8.

Le lemme suivant va être essentiel.

Lemme 13.25 (Dirichlet). Soit f une fonction 2π périodique, intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Nous supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ telle que

$$x \mapsto \frac{f(x) - l}{x - x_0} \quad \text{soit intégrable sur } I \subset [-\pi, \pi]$$

où I est un intervalle ouvert contenant x_0 . Alors, la série de Fourier $S_n(f)(x_0)$ est convergente et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx_0} = l.$$

Démonstration. La démonstration repose sur deux idées : la représentation intégrable de $S_n(f)(x)$ grâce au noyau de Dirichlet et le Lemme de Riemann-Lebesgue 12.42.

Puisque $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 2\pi$, nous avons

$$\begin{aligned} 2\pi(S_n(f)(x_0) - l) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) [f(x+x_0) - l] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}} [f(x+x_0) - l] dx \end{aligned}$$

grâce à la forme explicite de $D_n(x)$ (cf. proposition 13.24). D'où,

$$2\pi(S_n(f)(x_0) - l) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \times \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \times \frac{f(x+x_0) - l}{x} dx.$$

Nous observons que la dernière intégrale est de la forme $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha x)g(x)dx$ avec $\alpha > 0$. Dès lors que g est intégrable, le Lemme de Riemann-Lebesgue 12.42 nous permet de conclure. Or, ici, c'est précisément le cas d'après l'hypothèse portant sur l et puisque $x \mapsto \frac{x}{\sin \frac{x}{2}}$ est une fonction bornée] $-\pi, \pi$ [. Par suite, nous avons donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi(S_n(f)(x_0) - l) = 0$$

ce qui est le résultat attendu. \square

Remarque. Il se trouve que la même démonstration reste valable (mais est plus pénible à écrire, cf. \square) si nous affaiblissons légèrement l'une de nos hypothèses en supposant l'existence de deux nombres l_+ et l_- tels que les fonctions

$$x \mapsto x \mapsto \frac{f(x) - l_+}{x - x_0} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{f(x) - l_-}{x - x_0}$$

soient respectivement intégrables sur $]x_0, x_0 + \alpha[$ et $]x_0 - \alpha, x_0[$ pour un certain $\alpha > 0$. Dans ce cas $S_n(f)(x_0)$ est convergente et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx_0} = \frac{l_+ + l_-}{2}.$$

Par la suite, nous utiliserons cette version du théorème plutôt que celle que nous avons présenté.

Un bref rappel de vocabulaire est nécessaire avant d'énoncer un des résultats majeurs concernant la convergence ponctuelle d'une série de Fourier.

Définition 13.2.4. Une fonction f est $C^1(\mathbb{R})$ par morceaux lorsque f est $C^1(\mathbb{R})$ sauf en un nombre fini de points x_0 en lesquels la limite à gauche et à droite de f et f' existent. Nous noterons alors $f(x_0^+)$ la limite à droite et $f(x_0^-)$ la limite à gauche.

Énonçons à présent le résultat fondamental de cette section.

Théorème 13.26 (Lejeune-Dirichlet). Soit f une fonction 2π -périodique, $C^1(\mathbb{R})$ par morceaux. Alors sa série de Fourier converge en tout de point $x_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx_0} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

De plus la convergence de $S_n(f)(x_0)$ est uniforme sur tout intervalle fermé $I \subset [-\pi, \pi]$ sur lequel f est continue.

Démonstration. Comme le lecteur peut s'en douter, la démonstration va essentiellement reposer sur le Lemme de Dirichlet 13.25 (sa version améliorée). Soit x_0 un point de discontinuité²⁷, le théorème fondamental de l'analyse nous assure que pour tout $x > x_0$,

$$|f(x) - f(x_0^+)| = \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \leq (x - x_0) \sup_{t \in]x_0, x[} |f'(t)|.$$

27. Si x_0 est un point de continuité, il n'y a pas besoin de faire la distinction entre la limite à gauche et à droite.

Ceci justifie alors que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0+)}{x-x_0}$ est bornée et donc intégrable sur $]x_0, x_0 + \alpha[\subset [-\pi, \pi]$. Tout ce qui précède reste également valable pour la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0-)}{x-x_0}$ sur l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0[$. \square

Remarque. Nous verrons en exercice pourquoi il n'est pas possible d'obtenir la convergence uniforme sur tout intervalle où f est continue : il s'agit du phénomène de Gibbs.

Voyons un exemple d'application du théorème de Lejeune-Dirichlet 13.26.

Exemple 13.2.5. Soit $f(x) = x^2$ la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ et prolongée par 2π -périodicité sur \mathbb{R} . Observons que $f \in C^0(\mathbb{R})$ puisque

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x)$$

et $f \in C^1(\mathbb{R})$ par morceaux. Puisque la fonction est paire, $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Nous trouvons ensuite que

$$a_0(f) = \frac{\pi^2}{3} \quad a_n = \frac{4 \times (-1)^n}{n^2} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

à l'aide d'une double intégration par partie. Le théorème de Lejeune-Dirichlet 13.26 nous assure alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

En particulier, si $x = \pi$, cela implique que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Des questions surviennent naturellement : que se produit si f est moins régulière ? Si f est seulement supposée continue par exemple ? Est-il toujours possible d'avoir une convergence ponctuelle de la série de Fourier ?

Il se trouve qu'il est possible d'obtenir des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en tout point d'un ensemble dense dans \mathbb{R} . Dubois-Reymond a proposé un tel exemple et nous verrons au chapitre prochain, via de nouveaux outils d'analyse fonctionnelle, comment en produire d'autre. Voyons ce qu'il est tout de même possible de dire lorsque f est seulement supposée continue.

Convergence au sens de Césaro

Malgré l'observation négative de Dubois-Reymond, il est possible d'obtenir des résultats intéressants. Pour cela il faut accepter une convergence plus faible. A cet effet nous rappelons le résultat suivant.

Définition 13.2.5. Soient (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. Nous dirons que u_n converge vers l au sens de Césaro si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = l.$$

Remarque. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si (u_n) converge vers l alors (u_n) converge vers l au sens de Césaro mais que la réciproque est fautive.

Ce procédé de moyenne arithmétique va nous permettre de définir un nouveau noyau.

Définition 13.2.6. Soit $n \in \mathbb{N}_*$, nous définissons le noyau de Fejér K_n par

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

où D_k est le noyau de Dirichlet.

Evidemment, ce nouveau noyau satisfait des propriétés semblables à celles du noyau de Dirichlet (cf. proposition 13.24).

Proposition 13.27. Le noyau de Fejér K_n vérifie les propriétés suivantes :

1. Nous avons l'identité, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right) & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, K_n est positif.

2. $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 2\pi$.

3. Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, la suite (K_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur le compact $[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$.

Nous noterons $\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$ la moyenne arithmétique des sommes partielles de la série de Fourier $S_n(f)$. En outre, il est aisé de montrer que $\sigma_n(f)$ peut également s'écrire à l'aide d'un produit de convolution :

$$\sigma_n(f) = f * K_n$$

fournissant ainsi une représentation intégrale très utile. Cette observation va nous permettre d'établir le résultat suivant.

Théorème 13.28 (Fejér). Soit f une fonction continue, 2π -périodique. La suite $\sigma_n(f)$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f .

Démonstration. La démonstration va reposer sur deux idées : la représentation intégrale de $\sigma_n(f)$ et le fait qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Soit $\epsilon > 0$, la fonction étant continue et périodique, elle est uniformément continue sur \mathbb{R} (cf. théorème de Heine 8.14). il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$|x - t| \leq \alpha \implies |f(t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En utilisant la proposition 13.27, nous avons

$$I = 2\pi |f(t) - \sigma_n(f)(t)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) [f(t) - f(t-x)] dx \right|.$$

Utilisons à présent le fait essentiel que $K_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ et séparant l'intégrale en trois parties en utilisant le nombre $\alpha > 0$ donné par l'uniforme continuité. Nous obtenons alors la majoration suivante :

$$I \leq \int_{-\pi}^{-\alpha} K_n(x) |f(t) - f(t-x)| dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} K_n(x) |f(t) - f(t-x)| dx + \int_{\alpha}^{\pi} K_n(x) |f(t) - f(t-x)| dx.$$

Il nous reste à contrôler chacune de ces intégrales. Pour la première nous avons

$$\int_{-\pi}^{-\alpha} K_n(x) |f(t) - f(t-x)| dx \leq 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{-\alpha} K_n(x) dx.$$

De même, la troisième se majore de la même manière

$$\int_{\alpha}^{\pi} K_n(x) |f(t) - f(t-x)| dx \leq 2\|f\|_\infty \int_{\alpha}^{\pi} K_n(x) dx.$$

Pour la deuxième, nous utilisons l'uniforme continuité de f :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} K_n(x) |f(t) - f(t-x)| dx < \frac{\epsilon}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} K_n(x) dx \leq \epsilon\pi.$$

En résumé, nous avons obtenu que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$|f(t) - \sigma_n(f)(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\alpha} K_n(x) dx + \int_{\alpha}^{\pi} K_n(x) dx \right).$$

Or, d'après la proposition 13.27, (K_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$. Il existe donc $N_\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\sup_{\alpha \leq |x| \leq \pi} K_n(x) \leq \frac{\epsilon\pi}{4(\pi - \alpha)\|f\|_\infty}$$

Par conséquent, pour tout $n \geq N_\epsilon$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t) - \sigma_n(f)(t)| < \epsilon \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

□

Remarque. Puisque $\sigma_n(f)$ est un polynôme trigonométrique, le théorème de Fejér fournit une démonstration alternative (car constructive) du théorème de Weierstrass trigonométrique (qu'il est possible d'obtenir à l'aide de la version complexe du théorème de Stone-Weierstrass 8.28)²⁸.

Voici un corollaire intéressant du théorème de Fejér permettant d'obtenir un résultat de convergence simple sur \mathbb{R} d'une série de Fourier.

Corollaire 13.29. *Soit $f \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$. Si sa série de Fourier $S_n(f)(x)$ converge simplement sur \mathbb{R} alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = f(x).$$

Démonstration. Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = S(f)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En outre, nous avons aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x) = S(f)(x)$ puisque la convergence au sens de Césàro est plus faible. Or, le théorème de Fejér nous assure aussi que $(\sigma_n(f))$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} d'où, par unicité de la limite

$$S(f)(x) = f(x).$$

□

²⁸. Lequel assure que toute fonction continue, 2π -périodique est limite uniforme d'une suite de fonctions trigonométriques.

Remarque. Ce résultat est à comparer avec le théorème de Lejeune-Dirichlet 13.26.

Le chapitre que nous venons de conclure soulève encore des questions :

1. Nous avons utilisé les noyaux de Dirichlet D_n et de Fejér K_n , lesquels ont permis d'obtenir des résultats différents. Il est intéressant de se demander quelle la différence fondamentale²⁹ entre D_n et K_n ? Existe-t-il d'autres noyaux ? Quelles propriétés d'une série de Fourier peuvent-ils mettre alors en évidence ? Y a-t-il un lien avec les approximations de l'unité rencontrées plus tôt dans le chapitre de convolution ?
2. Nous avons présenté une manière de décomposer une fonction f sous forme d'une série trigonométrique. Dans un chapitre précédent, à la suite des développements limités, nous avons traité la décomposition en séries entières. Nous constatons que le point de vue est différent, **les séries entières sont locales** (autour d'un point) et les propriétés qui en découlent sont très fortes (convergence uniforme au voisinage de ce point, fonction de classe C^∞) tandis que pour les séries de Fourier, la **décomposition se fait globalement** (sur l'intervalle d'étude), concerne des fonctions moins régulières (parfois dérivables par morceaux ou dans $L^2([-\pi, \pi])$) et les modes de convergences sont souvent plus faibles (convergence simple ou en moyenne quadratique dans $L^2([-\pi, \pi])$).

Pour aider le lecteur nous proposons ci-dessous un résumé des modes de convergences (pour $S_n(f)$) obtenues suivant la régularité de f tout au long du chapitre.

- $f \in L^2([-\pi, \pi]) \iff c_n(f) \in l^2(\mathbb{Z})$; aussi, $S_n(f)$ converge vers f dans $L^2([-\pi, \pi])$ et nous avons l'identité de Parseval.
- $f \in L^1([-\pi, \pi]) \implies c_n(f) \in l_0(\mathbb{Z})$; $S_n(f)$ peut diverger sur des ensembles denses dans \mathbb{R} .
- $f \in L^1([-\pi, \pi])$ et $c_n(f) \in l^1(\mathbb{Z})$ alors $S_n(f)$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .
- $f \in C_{2\pi}^1([-\pi, \pi])$ alors $nc_n(f) \in l^1(\mathbb{Z})$ et $S_n(f)$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .
- $f \in C_{2\pi}^1([-\pi, \pi])$ par morceaux alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $S_n(f)$ converge simplement vers $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.
- $f \in C_{2\pi}^0([-\pi, \pi])$ alors $S_n(f)$ peut diverger mais $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Ceci mène à plusieurs interrogations :

1. Que dire des réciproques (des implications présentées ci-dessus) ?
2. L'espace de Hölder $C^\alpha(\mathbb{R})$ avec $\alpha \in]0, 1]$ est composé des fonctions vérifiant la propriété suivante : il existe $C > 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Notons que $C^1(\mathbb{R}) \subset C^\alpha(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$. Qu'est-il possible de dire de la séries de Fourier d'une fonctions α - hölderiennes ?

29. Nous y viendrons dans le prochain chapitre lors de l'étude du Théorème de Banach-Steinhaus .

3. Est-il possible de relier la convergence $L^2([-\pi, \pi])$ de $S_n(f)$ à une convergence ponctuelle de $S_n(f)$?

Voici quelques éléments de réponses à certains de ces questions ainsi que des éléments historiques (cf. [?]).

- Du Bois-Reymond a proposé en 1876 un exemple d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0 ; 30 ans plus tard Fejér apporte un exemple supplémentaire.
- En 1926, Kolomogorov a produit un exemple de fonction intégrable $I = [-\pi, \pi]$ dont la série de Fourier diverge en tout point de I .
- En 1966, Carleson montre que la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([-\pi, \pi])$ converge vers f pour presque tout x ; la série de Fourier d'une fonction continue converge vers f presque partout.
- En 1966, Kahane et Katznelson montrent qu'étant donné un ensemble borné N de mesure de Lebesgue nulle, il existe une fonction périodique continue telle que N soit précisément l'ensemble des points pour lesquels $S_n(f)$ diverge.
- En 1967, Hunt montra que le théorème de Carleson reste valable pour toutes fonctions $f \in L^p([-\pi, \pi])$ pour tout $p > 1$.

Pour terminer ce chapitre nous proposons une application des séries de Fourier à un problème isopérimétrique.

13.2.4 Problème isopérimétrique dans le plan

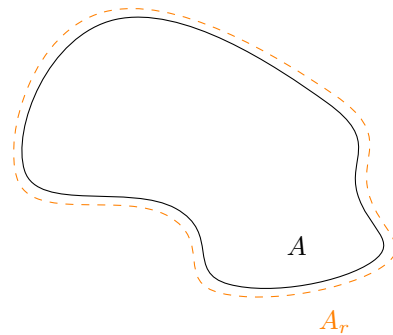
Le problème isopérimétrique dans le plan euclidien est un problème concret et vieux de plusieurs millénaires. Ce problème s'énonce comme suit : quels sont les ensembles minimisant le périmètre lorsque l'aire est fixée ?

La légende raconte que la reine Didon de Carthage avait résolu, de manière pragmatique, ce problème dont les solutions sont les disques euclidiens (cf. [?]).

D'un point de vue plus abstrait, un problème isopérimétrique peut s'énoncer dans des espaces très généraux. En effet, il suffit d'une mesure (comme celle de Lebesgue dans le cas du plan euclidien) pour définir le « volume » d'un ensemble et d'une distance pour définir la longueur du bord d'un ensemble. Par souci de simplicité et de concision, nous présentons ci-dessous une version « intégrée » du problème isopérimétrique gaussien. Nous renvoyons le lecteur vers [?, ?, ?] pour plus de détails.

A cet effet, introduisons quelques notations : soient $A \subset \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, nous désignons l'épaisseur de taille r de cet ensemble (vis à vis de la distance euclidienne d_2) par

$$A_r = \{x \in \mathbb{R}^d, d_2(x, A) < r\} \quad \text{pour tout } r > 0.$$



Autrement dit, sous la forme d'une somme de Minkowski,

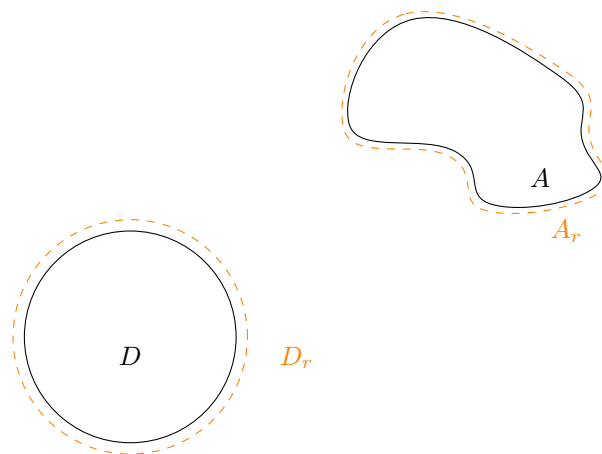
$$A_r = A + B_2(0, r) = \{x + y, x \in A, y \in B_2(0, r)\}$$

où $B_2(0, r)$ désigne la boule euclidienne de rayon r centrée en 0.

Avec de telles notations, la solution du problème isopérimétrique euclidien (sous forme intégrée) s'énonce comme suit

Théorème 13.30 (Brunn, Minkowski, Lusternik). *Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et D un disque tel que $\text{Vol}_2(A) = \text{Vol}_2(D)$ alors*

$$\text{Vol}_2(A_r) \geq \text{Vol}_2(D_r) \quad \text{pour tout } r > 0.$$



Autrement dit, le théorème précédent nous assure qu'en partant de deux ensembles A et D de même aires, l'aire de l'épaissi A_r sera toujours supérieur à celle de l'épaissi d'un disque.

Il se trouve qu'il est possible de donner une démonstration de ce résultat, dans le plan, grâce aux séries de Fourier. L'essentiel de la démonstration repose sur l'inégalité suivante

Proposition 13.31 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). *Soit f une fonction $C^1([a, b], \mathbb{R})$, de moyenne nulle, telle que $f(a) = f(b)$ alors*

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^2 \int_a^b |f'(t)|^2 dt. \quad (13.2.9)$$

Démonstration. Sans perdre en généralité, nous supposons que $a = -\pi$ et $b = \pi$. Par hypothèses, f et f' sont des éléments de $L^2([-\pi, \pi])$. L'identité de Parseval (cf. (13.1.7)) nous fournit alors les égalités suivantes :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2.$$

où $c_n(f)$ désigne le coefficient de Fourier de la fonction f . Puisque f est de moyenne nulle alors $c_0(f) = 0$ et comme $f(-\pi) = f(\pi)$ alors $c_0(f') = 0$. De plus, via une intégration par partie, nous avons déjà montré que

$$c_n(f') = in c_n(f) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

En conséquence, si $|n| \geq 1$ nous avons

$$|c_n(f)| \leq |n c_n(f)| = |c_n(f')|$$

d'où $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2$ ce qui fournit le résultat. De plus l'inégalité est stricte sauf lorsque $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$. \square

Remarque. 1. Finalement la démonstration consiste à développer f et f' le long de la base hilbertienne de l'espace sous-jacent et de comparer les coefficients obtenus. Nous verrons en exercice une variante de cette idée avec les polynômes d'Hermite et l'espace de Hilbert associé afin d'obtenir une autre inégalité de Poincaré.

Voyons à présent comment ce résultat nous permet de résoudre le problème isopérimétrique dans le plan. Pour cela nous allons utiliser des courbes paramétrées $\gamma : [0; \ell] \rightarrow \mathbb{C}$, où ℓ est la longueur de la courbe telles que $\gamma(0) = \gamma(\ell)$ ³⁰; nous noterons \mathcal{S} l'aire délimitée par γ . Pour plus de détails concernant les courbes paramétrées nous renvoyons le lecteur à l'excellent livre de [?].

Théorème 13.32 (Isopérimétrie (version faible)). *Soient $[a; b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} et $\gamma : [0; \ell] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe³¹ de classe $C^1([0, \ell], \mathbb{R}^2)$ par morceaux telle que, pour tout $t \in [a, b]$, $\gamma'(t) \neq 0$. Alors*

$$\ell^2 \leq 4\pi\mathcal{A}. \quad (13.2.10)$$

Le cas d'égalité est atteint si et seulement si γ est la paramétrisation d'un cercle.

Remarque. L'inégalité (13.2.10) est bien une reformulation du problème isopérimétrique décrit plus tôt : une longueur ℓ étant donnée, quelle est l'aire maximale \mathcal{A} qu'il est possible d'entourer avec un lacet de longueur ℓ ? Nous résolvons cependant une forme affaiblie du problème isopérimétrique euclidien en supposant, pour simplifier l'exposition, une certaine régularité de la courbe étudiée.

³⁰. Cette forme de périodicité explique pourquoi les séries de Fourier peuvent être employées.

³¹. supposée « simple », c'est-à-dire sans « boucles ».

Démonstration. La preuve ci-dessous est due à Hurwitz (cf. [?]). Pour tout $t \in [0, \ell]$, nous avons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec x et y deux fonctions de classe $C^1([0, \ell], \mathbb{R})$. Puisque $\gamma'(s) \neq 0$ pour tout $s \in [0, \ell]$, nous pouvons paramétrer cette courbe par longueur d'arc : la courbe est parcourue à vitesse constante, autrement dit

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in [0, \ell].$$

Enfin, puisque les translations n'affectent pas l'aire délimitée par la courbe γ nous pouvons supposer aussi que

$$\int_0^\ell x(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\ell y(t)dt = 0.$$

Nous admettons une conséquence de la formule de Green-Riemann (cf. [?]) laquelle permet d'obtenir une expression de l'aire \mathcal{A} délimitée par une courbe suffisamment régulière :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^\ell x(t)y'(t) - x'(t)y(t)dt.$$

Pour majorer cette intégrale, il suffit d'observer ceci : si $v_1 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v_2 = (y', -x') \in \mathbb{R}^2$ alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire euclidien

$$|\langle v_1, v_2 \rangle| \leq \|v_1\|_2 \|v_2\|_2.$$

Ceci implique alors que

$$2\mathcal{A} \leq \int_0^\ell \sqrt{x(t)^2 + y^2(t)} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^\ell \sqrt{x(t)^2 + y^2(t)} dt \leq \sqrt{\ell} \sqrt{\int_0^\ell x(t)^2 + y^2(t) dt}$$

où la dernière majoration est obtenue via une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz³². Nous avons alors montré que

$$4\mathcal{A}^2 \leq \ell \int_0^\ell x^2(t) + y^2(t) dt.$$

L'inégalité de Poincaré-Wirtinger 13.31 entraîne alors que

$$4\mathcal{A}^2 \leq \ell \times \frac{\ell^2}{4\pi^2} \left(\int_0^\ell x'^2(t) + y'^2(t) dt \right) = \frac{\ell^4}{4\pi^2}$$

En simplifiant, nous en déduisons donc que

$$4\mathcal{A}^2 \leq \frac{\ell^4}{4\pi^2} \iff 4\pi\mathcal{A} \leq \ell^2.$$

En examinant les cas d'égalités dans les différentes majorations, nous constatons que la courbe doit alors être de la forme

$$\gamma(t) = \frac{\ell}{2\pi} (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{pour tout } t \in [0, \ell]$$

i.e. γ décrit un cercle de rayon $r = \frac{\ell}{2\pi}$. □

32. Cette fois-ci dans $L^2([0, \ell])$.

13.3 Références historiques

A compléter.

13.4 Exercices

A compléter.