Chapitre 2

Limite et convergence de suites réelles

Dans ce chapitre nous allons nous focaliser sur l'étude de suites de nombres réels et allons donner la définition formelle d'une limite. Comme nous allons le constater, il n'est pas toujours évident de trouver la limite d'une suite. Nous verrons que des arguments de monotonie nous faciliterons la tâche pour justifier l'existence d'une limite. Nous présenterons également un critère caractérisant la convergence d'une suite, ce sera l'occasion de nous interroger sur la nature même d'une suite convergente et les propriétés qu'elle doit satisfaire pour effectivement converger. Nous aborderons alors la notion de valeurs d'adhérences et de limites supérieure et inférieure. L'un des résultats majeurs de ce chapitre, le théorème de Bolzano-Weierstrass 9, sera l'occasion de présenter un principe de dichotomie très utile. Par exemple, ce principe sera mis en oeuvre pour approcher, par excès et par défaut, des nombres réels comme $\sqrt{2}$ à l'aide d'une suite de nombres rationnels ; cette approche s'implémente aisément sur un ordinateur.

2.1 Limites de suites

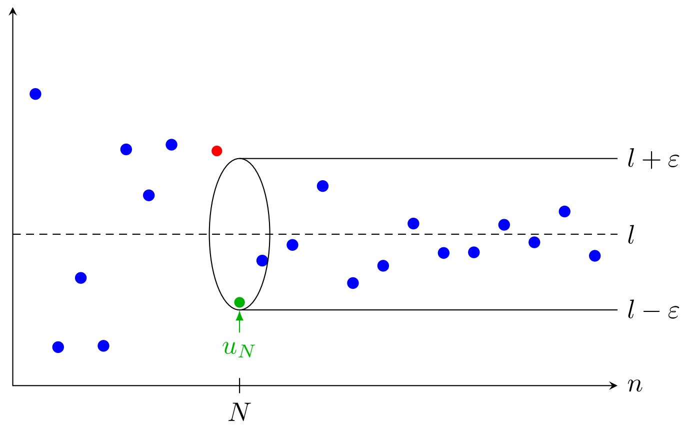
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels. En classe de terminale, la notation suivante a été utilisée

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

avec $l \in \mathbb{R}$ pour indiquer que u_n est aussi proche de l que souhaité à condition de choisir n suffisamment grand. Nous allons voir ce que cela signifie réellement et comment définir cette idée de manière rigoureuse. Pour cela **nous allons devoir quantifier cette notion**. L'idée est de traduire, de manière formelle, qu'étant donnée une précision, à partir d'un certain rang, l'écart entre u_n et sa limite l est inférieure à cette précision. Formellement, cela donne la définition suivante.

Définition 2.1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. Nous dirons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ si l'assertion suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$



Remarque. Commentons cette définition avant de l'illustrer à l'aide d'un exemple. Avant toutes choses, si $a, b \in \mathbb{R}$ rappelons que $|a-b|$ correspond à la distance entre a et b.

1. ε correspond à la **précision** que nous souhaitons. Dans l'idée, ε est choisi petit ($\varepsilon = 10^{-3}$ par exemple) mais la définition impose de choisir ε quelconque.
2. $\exists N \in \mathbb{N}$ et $\forall n \geq N$ signifie qu'il existe un rang N à partir duquel la suite u_n vérifie une propriété.
3. $|u_n - l| \leq \varepsilon$ indique que la **distance entre** u_n **et** l est inférieure (ou égale) à ε (la précision choisie).
4. En observant l'ordre des quantificateurs, il apparaît que N dépend du choix de ε, ce qui semble bien naturel.
5. Une dernière manière de dire tout ceci est la suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$, nous avons

   $$|u_n - l| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \iff l-\varepsilon \leq u_n \leq l+\varepsilon \iff u_n \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon].$$

   Autrement dit, **à partir d'un certain rang** u_n **se trouve coincé dans « une boite »** (l'intervalle $[l-\varepsilon; l+\varepsilon]$) de taille 2ε et ceci pour n'importe quelle valeur de ε. Cette propriété est forcément contraignante et ne peut pas être vérifiée par n'importe quelle suite.
6. Nous invitons le lecteur à démontrer que lorsqu'une suite converge sa limite l est unique.

Définition 2.1.2. *Soit (u_n) une suite de nombre réels. Nous dirons que u_n tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,*

$$u_n \geq A.$$

Nous noterons ceci par $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque.
1. La définition précédente illustre le fait suivant : peu importe le seuil A choisi (à priori très grand), il est toujours possible de trouver un rang à partir duquel la suite dépasse ce seuil. Il s'agit bien d'une quantification de du fait que u_n tend vers $+\infty$.
2. La convergence vers $-\infty$ s'exprime de la même manière, cette fois-ci en supposant que pour tout $A < 0$, il existe un rang à partir duquel $u_n \leq A$.

3. Lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, nous dirons que la suite diverge.

Voyons sur deux exemples comment établir qu'une suite converge ou diverge à partir de ces définitions.

Exemple 2.1.1. 1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. D'après vos cours du lycée, vous savez que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Démontrons-le rigoureusement. Pour fixer les idées, débutons par le cas $\varepsilon = 10^{-3}$. Puisque $l = 0$, nous devons montrer qu'il existe un certain rang N à partir duquel,

$$|u_n - 0| \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq 10^{-3}.$$

En réfléchissant un peu, nous constatons qu'il faut choisir $N = 10^3$. En effet, si $n \geq N$, nous avons

$$n \geq 10^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq 10^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \leq \varepsilon.$$

Si nous avions voulu une meilleure précision, $\varepsilon = 10^{-9}$ par exemple, le raisonnement montre qu'il faut choisir N plus grand encore (i.e. $N = 10^9$).

Finalement, tout ce que nous avons fait reste valable pour n'importe quel choix d'epsilon. Formellement, si une précision $\varepsilon > 0$ est donnée, il suffit de choisir $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$.[1] En effet, si $n \geq N$ alors

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

2. Le lecteur peut reprendre le troisième point de l'exemple (1.1.2) dans lequel nous démontrons que $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Voici quelques résultats utiles concernant la convergence de suite.

Proposition 2. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels et $l, l' \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée*[2] *: il existe $M > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$|u_n| \leq M.$$

2. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l et si $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers l' alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n = l \times l'.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Par exemple, $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$ et $\lfloor -4 \rfloor = -4$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

2. Il est intéressant de s'interroger quant à la réciproque : toute suite bornée est-elle convergente ? Si ce n'est pas le cas, que manque-t-il à une suite bornée pour converger ? Des éléments de réponses seront proposés dans les sections suivantes.

Remarque. Pour démontrer ce genre de résultats, il est **essentiel d'utiliser l'inégalité triangulaire**[3] : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{2.1.1}$$

Le lecteur aura déjà rencontré durant sa scolarité de nombreuses opérations liées aux limites. Par exemple, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}_*$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}.$$

Par soucis de concision, nous ne reviendrons pas là dessus et considérons qu'il s'agit de notions connues du lecteur ; nous lui laissons d'ailleurs le soin au lecteur de chercher à démontrer de telles assertions en utilisant les quantificateurs.[4] D'ailleurs, l'objectif de la preuve ci-dessous est de montrer comment cela peut se mettre en oeuvre. Les démonstrations de tout ceci peuvent se trouver dans [**?**] par exemple.

Démonstration. Admettons, temporairement, le premier point et démontrons le second. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous devons montrer qu'il existe N, tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n \times v_n - l \times l'| \leq \varepsilon.$$

A priori, étant donné $\varepsilon > 0$, les seules informations que nous avons sont l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \tag{2.1.2}$$

et, de manière similaire, qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_n - l'| \leq \varepsilon. \tag{2.1.3}$$

Observons de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$u_n \times v_n - l \times l' = (u_n - l)v_n + l(v_n - l').$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire (2.1.1) (avec $a = (u_n - l)v_n$ et $b = l(v_n - l')$), nous obtenons

$$|u_n \times v_n - l \times l'| \leq |u_n - l| \times |v_n| + |l| \times |v_n - l'|.$$

A présent, l'objectif est de montrer que toutes les quantités intervenant dans le membre de droite **sont petites**. Pour cela nous allons utiliser les rangs N_1 et N_2 ainsi que la première partie de la proposition (l'existence de $M > 0$). Si $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geq N$, forcément (2.1.2) et (2.1.3) sont vérifiées :

$$|u_n \times v_n - l \times l'| \leq \varepsilon \times |v_n| + |l| \times \varepsilon.$$

En outre, d'après la première assertion de la proposition, puisque $(v_n)_{n\geq 0}$ converge, elle est bornée : il existe $M > 0$ telle que $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où

$$|u_n \times v_n - l \times l'| \leq \varepsilon \times M + |l| \times \varepsilon = \varepsilon(M + l).$$

3. Laquelle est encore valable pour $a, b \in \mathbb{C}$.
4. A cet effet, il conviendra d'observer le fait suivant : si $\lim_{n\to+\infty} v_n = l' > 0$ alors, à partir d'un certain rang $v_n \geq \frac{l'}{2} > 0$. Pour démontrer ce résultat, il suffit d'utiliser la définition 2.1.1 avec $\varepsilon = \frac{l}{2}$.

Puisque ε est arbitraire, nous pouvons le remplacer par $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M+l} > 0$ et cela termine la preuve.

Démontrons à présent la première assertion. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ceci est en particulier vrai si $\varepsilon = 1$ à partir d'un certain rang N_1. De plus, grâce à l'inégalité triangulaire (2.1.1), nous avons, pour tout $n \geq N_1$,

$$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + l.$$

Il ne reste plus qu'à trouver comment majorer les N_1 premiers termes de la suite. Pour cela, nous pouvons simplement observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$|u_n| \leq \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N_1-1}|, 1 + l).$$

Il suffit enfin de poser $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N_1-1}, |1 + l) > 0$ [5] pour terminer la démonstration.

□

Il est important de se familiariser avec les arguments utilisés dans la démonstration précédente.

En réfléchissant, nous constatons que la définition 2.1.1 n'est pas très pratique : pour démontrer qu'une suite converge, il est **nécessaire de connaitre sa limite** l ! Le lecteur conviendra que cela n'est pas évident lorsque la suite est définie d'une manière non explicite ou lorsque sa formulation n'est pas élémentaire. Par exemple, considérons l'exemple suivant à cet effet.

Exemple 2.1.2. Quelle est la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2}$ lorsque $n \to +\infty$?

Il est donc important de trouver des critères nous facilitant la tâche.

2.2 Limites et comparaison

Voici un premier critère permettant de déterminer facilement la limite d'une suite donnée en procédant à une comparaison avec d'autres suites dont la limite est déjà connue.

Théorème 3 (des gendarmes)**.** *Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) des suites telles qu'à partir d'un certain rang N_0,*

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Si $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Remarque. 1. Lorsque l'une des suites (v_n) ou (w_n) est constante et vaut l pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème des gendarmes prend le nom du *théorème du marteau et de l'enclume.*

5. Il est important que ce maximum porte sur un nombre fini de termes ; le maximum d'une infinité de valeurs n'existe pas forcément. Par exemple, le maximum (sur l'ensemble des termes) de la suite $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ n'existe pas. Le même problème se pose pour le minimum : $\min_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ n'existe pas tandis que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0$; notons d'ailleurs que la suite est composée de termes strictement positifs mais que sa borne inférieure est nulle.

2. En pratique, l'objectif est de trouver deux suites (v_n) et (w_n) qui encadrent la suite (u_n) et dont la limite commune est connue.
3. Le théorème permet de traiter les cas où $l = \pm\infty$. En effet, si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; dans ce cas, la suite (w_n) n'a apporté aucune information. Un constat similaire s'observe lorsque $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

Démonstration. Nous traitons uniquement le cas où $l \in \mathbb{R}$ est un nombre fini. Par hypothèses, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_1 et N_2 des entiers tels que

$$\text{pour tout } n \geq N_1, \quad |v_n - l| \leq \varepsilon$$

et

$$\text{pour tout } n \geq N_2, \quad |w_n - l| \leq \varepsilon.$$

En particulier, si $n \geq \max(N_1, N_2, N_0)$ alors

$$w_n \leq l + \varepsilon \quad \text{et} \quad l - \varepsilon \leq v_n.$$

En conséquence, puisque $v_n \leq u_n \leq w_n$ lorsque $n \geq \max(N_1, N_2, N_0)$, nous en déduisons que

$$l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

ce qui est le résultat. □

Voyons cela sur des exemples.

Exemple 2.2.1. 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$. Il suffit d'observer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1.$$

Ainsi nous avons $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et nous pouvons conclure en appliquant le théorème des gendarmes 3 puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Revenons à la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Puisqu'il s'agit d'un somme de termes positifs, il est possible de majorer chacun d'entre eux par le plus grand

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2} \leq n \times \frac{n}{1+n^2} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \leq w_n$$

avec $w_n = \frac{n^2}{1+n^2}$ pour tout $n \geq 1$. De manière similaire, en minorant chacun des termes par le plus petit d'entre eux, nous trouvons

$$n \times \frac{n}{n+n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2} \quad \Longleftrightarrow \quad v_n \leq u_n$$

avec $v_n = \frac{n^2}{n+n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Il n'est pas difficile de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1.$$

Par suite, le théorème des gendarmes 3 nous assure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Le théorème des gendarmes est efficace mais requiert d'avoir un catalogue de suites (dont les limites sont connues) assez étoffé afin de procéder à des encadrements appropriés.

2.3 Convergence et monotonie

Voyons une autre manière de déterminer des limites, cette fois-ci en supposant que la suite (u_n) étudiée vérifie une **propriété de monotonie** à laquelle il faudra ajouter une **propriété de majoration ou de minoration**.[6] Rappelons de nouveau une question intéressante : une suite convergente est bornée (cf. proposition 2), la réciproque est-elle vraie ? Si ce n'est pas le cas, que manque-t-il à une suite bornée pour être convergente ? Les éléments présentés dans la suite de ce chapitre vont permettre de répondre à cette question.

Définition 2.3.1. *Soit (u_n) une suite de nombres réels.*

1. *La suite est dite croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$u_n \leq u_{n+1}.$$
2. *La suite est dite décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$u_n \geq u_{n+1}.$$
3. *La suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Remarque. La suite est dit strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. La même chose peut être faite pour définir une suite strictement décroissante.

Voici le résultat essentiel de cette section ; pour démontrer celui-ci nous utiliserons de nouveau la notion de borne supérieure et inférieure. L'importance de ce résultat réside dans le fait suivant : **il permet de justifier la convergence d'une suite sans connaitre au préalable la valeur de sa limite l ; des arguments supplémentaires sont alors nécessaires pour déterminer la valeur de l.**

Théorème 4 (Convergence suites monotones)**.** *Soit (u_n) une suite de nombre réels.*

1. *Si (u_n) est décroissante minorée alors elle converge vers une limite finie.*
2. *Si (u_n) est décroissante non-minorée alors elle diverge vers $-\infty$.*
3. *Si (u_n) est croissante majorée alors elle converge vers une limite finie.*
4. *Si (u_n) est croissante non-majorée alors elle diverge vers $+\infty$.*

Remarque. La démonstration est instructive car elle nous apprend, lorsque la suite est croissante et majorée, que la limite correspond à sa borne supérieure ; lorsqu'elle est décroissante et minorée, elle converge vers sa borne inférieure.

Démonstration. Nous démontrons uniquement les points 3 et 4 du théorème, les premières assertions s'obtiennent ensuite aisément en observant que si (u_n) est une suite décroissante alors $(-u_n)$ est croissante.

Soit (u_n) une suite croissante. Supposons tout d'abord que cette suite est majorée par $M \in \mathbb{R}$. Dans ce cas l'ensemble $\{u_n; \quad n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré, il admet (cf. chapitre 1) donc une

6. Une suite (u_n) est majorée par A si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq A$; la définition d'une suite minorée s'exprime mutatis mutandis.

borne supérieure que nous noterons l. Pour tout $\varepsilon > 0$, par définition de la borne supérieure, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$l - \varepsilon \leq u_N$$

et

$$u_n \leq l \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, en utilisant le fait que la suite est croissante, nous obtenons, pour tout $n \geq N$,

$$l - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq l \leq l + \varepsilon.$$

Autrement dit, nous avons montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = l.$$

Supposons à présent que la suite ne soit pas majorée : pour tout $A > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_N \geq A.$$

D'où, puisque la suite est croissante, nous avons pour tout $n \geq N$,

$$u_n \geq u_N \geq A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

□

Illustrons ce nouveau théorème sur différents exemples.

Exemple 2.3.1. 1. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Nous rappelons au passage que $k! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ pour tout $k \geq 1$ et $0! = 1$. La suite est visiblement croissante puisque, pour tout $n \geq 1$ nous avons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Il nous reste à montrer que la suite est majorée. Pour cela, nous laissons au lecteur le soin de démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Ceci permet de majorer u_n. En effet,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3.$$

Dans la dernière majoration, nous avons utilisé le fait suivant [7]

$$\sum_{k \geq 0} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2.$$

7. Nous demandons au lecteur d'accepter temporairement ce résultat qui sera démontré dans le chapitre 3 sur les séries numériques.

En conclusion, nous avons une suite croissante et majorée : elle converge donc vers un nombre que nous noterons e[8]. Observons en passant que ce nombre vérifie l'inégalité suivante

$$u_2 = 2,5 \leq e \leq 3.$$

2. Traitons un cas où la suite diverge vers $+\infty$. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Comme dans l'exemple précédent, il est simple de vérifier que la suite (u_n) est croissante. Démontrons à présent que cette suite n'est pas majorée. A cet effet, considérons $n \geq 1$ et $p \geq 1$ et observons alors que

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p}$$

puisque chacun des p termes de la somme sont tous plus grand que $\frac{1}{n+p}$ (le plus petit d'entre eux). En particulier, si $p = n$, nous avons montré que

$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}.$$

De manière équivalente, en choisissant $n = 2^{k-1}$ avec $k \geq 1$, nous avons obtenu que

$$(H_k) : \quad u_{2^k} - u_{2^{k-1}} \geq \frac{1}{2}. \tag{2.3.1}$$

Fixons à présent un entier $p \geq 2$ et additionnons les p inégalités $H_1, H_2, \ldots, H_p$ obtenues à partir de (2.3.1) en choisissant $k = 1, 2, \ldots, p$. Nous obtenons ainsi, pour tout $p \geq 2$,

$$(u_2 - u_1) + (u_4 - u_2) + (u_8 - u_4) \ldots + (u_{2^p} - u_{2^{p-1}}) \geq \frac{p}{2}.$$

En outre, il est possible de simplifier le membre de gauche de l'inégalité précédente en observant que certains termes s'annulent[9]. Ceci mène, pour tout $p \geq 2$, à

$$u_{2^p} - u_1 \geq \frac{p}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad u_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$$

puisque $u_1 = 1$. Ceci nous assure alors que la suite (u_n) n'est pas majorée. D'où

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = +\infty.$$

2.3.1 Suites adjacentes

Le principe de monotonie peut être fort utile pour construire des algorithmes donnant un moyen d'approcher une valeur limite par excès et par défaut, tout en contrôlant l'erreur commise. Pour cela, il est nécessaire de définir la notion de suites adjacentes.

Théorème 5 (Suites adjacentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \tag{2.3.2}$$

8. Il s'agit d'un nombre d'Euler, lié à la fonction exponentielle, dont nous reparlerons ultérieurement.
9. Il est fréquent de de dire de façon imagée que ces termes se « télescopent »

alors les deux suites (u_n) *et* (v_n) *convergent respectivement vers deux nombres* α *et* β *vérifiant, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$u_n \leq \alpha \leq \beta \leq v_n.$$

Si de plus

$$\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0 \tag{2.3.3}$$

alors $\alpha = \beta$*.*

Remarque.

1. Si (u_n) et (v_n) vérifient (2.3.2) et (2.3.3), nous dirons qu'elles sont **adjacentes**. Ces suites convergent vers une limite $l \in \mathbb{R}$, la suite (v_n) approche l par excès et (u_n) par défaut.
2. Le théorème 5 peut se reformuler d'un point de vue plus géométrique. A cet effet, posons $I_n = [u_n, v_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et observons que l'hypothèse (2.3.2) implique que ces **segments sont emboités** (faire un dessin) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} \subset I_n \subset \ldots \subset I_0.$$

   Lorsque la propriété (2.3.3) est aussi vérifiée (signifiant que la taille de segments devient infiniment petit lorsque $n \to +\infty$), le théorème 5 nous assure que **l'intersection de tous ces intervalles est réduit à un unique point**. Avec cette formulation, le théorème prend l'appellation « théorème des segments emboités ». Nous dirons quelques mots supplémentaires à ce sujet lorsque nous présenterons, plus tard dans ce chapitre, le théorème de Bolzano-Weierstrass 9.

Voyons un exemple d'application du théorème 5.

Exemple 2.3.2 (e est irrationnel)**.** Considérons les suites $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ définies chacune pour tout $n \geq 1$. Dans un premier temps, nous allons montrer que ces suites sont adjacentes et qu'elles convergent vers le nombre d'Euler e.[10] Dans un second temps, nous montrerons que ce nombre est irrationnel : il n'est pas possible de trouver $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_*$ tel que $e = \frac{p}{q}$.

1. Montrons que ces suites sont adjacentes.
   (a) Nous avons montré dans l'exemple 2.3.1 que la suite (u_n) est strictement croissante. Ceci réside dans le fait que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
   (b) Démontrons que la suite (v_n) est strictement décroissante. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right] \\ &= -\frac{1}{(n+1)!(n+1)n} < 0. \end{aligned}$$

10. Bien sûr, ceci fait écho à l'exemple 2.3.1.

(c) Il est simple de montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ pour ensuite conclure (grâce au théorème 5) que ces deux suites convergent vers e

$$\text{i.e.} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = e.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1} < v_n \tag{2.3.4}$$

2. Montrons que $e \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde, supposons que cela soit le cas et qu'il existe deux entiers relatifs (non nuls) p et q premiers entre eux (i.e. la fraction est irréductible) tels que

$$e = \frac{p}{q}.$$

L'inégalité (2.3.4) nous assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$u_n < \frac{p}{q} < u_n + \frac{1}{nn!}.$$

En particulier, pour $n = q$, nous avons $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q\times q!}$. Multiplions cette nouvelle inégalité par $q \times q!$, ceci mène à

$$q \times q! \times u_q < p < q \times q! \times u_q + 1.$$

A présent, notons $N = q \times q! \times u_q$ et observons (via la définition de u_q) que $N \in \mathbb{N}$. Nous avons donc montré que

$$N < p < N + 1$$

ce qui est absurde puisque N et $N+1$ sont des entiers consécutifs, il n'est pas possible d'insérer un entier p entre les deux. Ce qui achève la démonstration.

Remarque. Remarquons en passant que l'inégalité (2.3.4) (obtenue grâce au théorème 5) permet d'approcher assez précisément e puisque nous avons une majoration de l'erreur commise : pour tout $n \geq 0$,

$$0 < e - u_n < \frac{1}{n \times n!}$$

Par exemple, si $n = 10$ l'erreur commise est inférieure à 10^{-8} et $u_{10} \approx 2,71828182\ldots$ est une approximation par défaut de e dont les sept premières décimales coïncident avec le véritable nombre.

2.4 Convergence et suites de Cauchy

La section précédente fournissait des critères intéressants et pratiques pour démontrer qu'une suite converge sans connaitre au préalable sa limite. Nous avons même, via le théorème 5 une manière d'approcher (par défaut et par excès) une limite tout en contrôlant l'erreur commise. Le seul inconvénient de ces résultats est qu'ils reposent essentiellement sur le fait que les nombres réels se représentent par une droite graduée et ordonnée. Pour l'instant cet aspect n'est pas limitant mais il pourrait le devenir par la suite lorsque nous étudierons des objets mathématiques plus élaborés.

Il se trouve qu'il est possible d'exhiber un deuxième critère permettant d'attester qu'une suite de nombre réels converge. L'avantage de ce que nous allons présenter est que cette **nouvelle notion se généralise aisément à des espaces plus abstraits**.

Définition 2.4.1 (Suite de Cauchy)**.** *Soit (u_n) une suite de nombre réels. Nous dirons qu'il s'agit d'une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$,*

$$|u_q - u_p| \leq \varepsilon.$$

Remarque. La définition quantifie le fait, qu'à partir d'un certain rang, l'écart entre deux termes de la suite est aussi petit que nous le souhaitons.

En posant $q = p+k$ pour tout $k \geq 0$, le lecteur pourra aussi rencontrer la formulation alternative des suites de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$ et tout $k \geq 0$,

$$|u_{p+k} - u_p| \leq \varepsilon.$$

Voyons comment relier cette nouvelle notion aux suites convergentes. Nous en profitons au passage pour présenter une propriété vérifiée par les suites de Cauchy.

Proposition 6. *Soit (u_n) une suite de nombres réels.*

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors la suite est de Cauchy.*
2. *Si (u_n) est de Cauchy alors la suite est bornée.*

Démonstration. Démontrons les assertions les unes après les autres.

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
$$|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Considérons alors $p, q \geq N$ et, grâce à l'inégalité triangulaire, observons que
$$|u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
La suite est bien de Cauchy.
2. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Alors, pour le choix $\varepsilon = 1$ il existe N_1 tel que pour tout $p, q \geq N_1$, nous avons
$$|u_p - u_q| \leq 1.$$
En particulier, pour tout $p \geq N_1$, nous avons $|u_p - u_{N_1}| \leq 1$ d'où
$$|u_p| = |u_p - u_{N_1} + u_{N_1}| \leq |u_p - u_{N_1}| + |u_{N_1}| \leq 1 + |u_{N_1}| = M_1.$$
En outre, lorsque $p < N_1$, nous avons
$$|u_p| \leq \max\Big(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N_1-1}|\Big) = M_2.$$
Il suffit ensuite de poser $M = \max(M_1, M_2)$ pour obtenir, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$|u_p| \leq M.$$

□

Remarque. Il est naturel de se demander si toutes les suites bornées sont de Cauchy. La réponse à cela est négative. En effet, soit $u_n = (-1)^n$. Dans ce cas, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons (en distinguant les cas pairs et impairs)

$$|u_{p+1} - u_p| = 2 > 0,$$

il n'est donc pas possible que la suite (u_n) vérifie la définition 2.4.1. Ici, le problème est que la suite (u_n) n'est pas convergente.

Comme nous allons le voir, il est possible de démontrer que, **dans $\mathbb{R}$, les suites convergentes sont exactement les suites de Cauchy.** [11]

Pour démontrer ce résultat, il est nécessaire d'aborder la notion de valeur d'adhérence d'une suite.

2.4.1 Sous-suite et valeurs d'adhérence

Parfois, il arrive qu'une partie infinie d'une suite s'accumule à proximité d'une valeur et cela sans que la suite étudiée soit forcément convergente.

Exemple 2.4.1. Si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette suite ne converge pas mais les termes paires s'accumulent près de la valeur 1 tandis que les termes impaires s'accumulent près de la valeur -1.

L'exemple précédent suggère qu'il est peut-être pertinent de ne pas considérer l'intégralité des termes d'une suite mais plutôt de se restreindre à une partie d'entre eux seulement afin d'obtenir une suite convergente.

Définition 2.4.2 (Sous-suite)**.** *Etant donnée une suite $(u_n)_{n\geq 0}$, une sous-suite extraite correspond à une partie des éléments de la suite. Autrement dit, pour définir une sous-suite il suffit d'exhiber une application croissante d'entiers $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ afin de considérer la suite $(u_{\phi(n)})_{n\geq 0}$.*

Remarque. Dans l'exemple précédent, nous avons considéré deux sous-suites. L'une obtenue avec l'application $\phi_1(n) = 2n$ et l'autre avec $\phi_2(n) = 2n + 1$. Parfois, pour alléger les notations, nous noterons une sous-suite $(u_{n_k})_k$ où $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante.

Voici un premier résultat concernant une suite convergente et le comportement de ses sous-suites.

Proposition 7. *Soit (u_n) une suite de nombre réels. Si (u_n) convergent vers $l \in \mathbb{R}$ alors toute sous-suite extraite converge également vers l.*

11. Nous verrons dans un chapitre ultérieur que la notion des suites de Cauchy se généralise aux espaces métriques (E, d) où d désigne une distance. Pour cela, il suffit de modifier la définition 2.4.1 en remplaçant $|u_p - u_q|$ par $d(u_p, u_q)$; la notion de suite de Cauchy devient alors liée à la distance d associée à l'espace E. Certaines propriétés de l'espace E s'observent alors en choisissant une distance plutôt qu'une autre. Dans le chapitre actuel $E = \mathbb{R}$ et d est définie par $d(x, y) = |x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et nous avons montré que les suites de Cauchy étaient convergentes pour cette métrique (ce qui n'aurait pas été forcément le cas avec un autre choix de distance). En fait, en général, la propriété (satisfaite par $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) que toute suite de Cauchy est convergente n'est pas forcément vérifiée par un espace métrique (E, d) quelconque. Cependant, il sera possible d'exhiber une large classe d'espace satisfaisant ceci : il s'agit des espaces métriques *complets*. Ces derniers sont des ensembles comparables à $(\mathbb{R}, |\cdot|)$: ils n'ont pas de trous ; par opposition $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet, il manque des nombres. Comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, il est possible de construire une suite (u_n) de nombres rationnels (i.e. $u_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) qui converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; il est problématique que la limite n'appartienne plus à l'ensemble de départ.

Remarque. La contraposée de ce résultat est très utile pour justifier qu'une suite ne converge pas : il suffit d'exhiber deux sous-suites qui convergent vers des valeurs différentes. C'est notamment ce qui se produit dans l'exemple 2.4.1 alors que la suite étudiée est bornée.

Démonstration. Soit $(u_{\phi(n)})$ une sous-suite extraite à l'aide d'une application croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Tout d'abord, observons qu'à l'aide d'une récurrence, il est possible de montrer que pour $\phi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons à présent $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

En outre, dès lors que $n \geq N$ nous avons aussi $\phi(n) \geq n$. Par suite,

$$|u_{\phi(n)} - l| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = l$. □

Comme nous l'avons vu dans l'exemple 2.4.1, il est possible de produire deux sous-suites convergentes à partir d'une suite donnée [12]. Les limites, à priori distinctes, alors obtenues portent le nom de **valeur d'adhérence**.

Définition 2.4.3 (Valeur d'adhérence)**.** *Soit (u_n) une suite de nombres réel. Nous appelons valeur d'adhérence de la suite (u_n) tout nombre $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une sous-suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers a lorsque $n \to +\infty$.*

Remarque. Le lecteur ayant un bagage mathématique plus avancé reconnaitra la notion de point d'accumulation.

Il se trouve qu'il est possible d'exhiber des suites admettant une valeur d'adhérence sans que cette suite soit bornée (et donc puisse converger vers une quelconque limite).

Exemple 2.4.2. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = n \quad \text{si} \quad n \quad \text{est impair} \quad ; \quad u_n = 1 \quad \text{si} \quad n \quad \text{est pair.}$$

Il est alors évident, en considérant $\phi(n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ que 1 est une valeur d'adhérence. Notons également que la suite n'est pas bornée, elle ne peut donc pas converger.

Nous allons constater que **l'existence d'une valeur d'adhérence est précisément ce qui manque à une suite de Cauchy pour converger**.

Proposition 8. *Soit (u_n) une suite de nombre réels. Supposons que (u_n) est une suite de Cauchy et que a est une valeur d'adhérence de la suite alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Tout d'abord, par définition d'une valeur d'adhérence, notons qu'il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = a.$$

12. Il est d'ailleurs naturel de se demander quelle(s) condition(s) doit vérifier une suite (u_n) afin qu'il soit possible de construire des sous-suites convergentes. La réponse à cela sera donné par le théorème de Bolzano-Weierstrass 9.

En particulier, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ [13]

$$|u_{\phi(n)} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En outre, grâce à la propriété de Cauchy, choisissons $N_2 \in \mathbb{N}$ de sorte que pour tout $p, q \geq N_2$,

$$|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons alors $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, nous avons (grâce à l'inégalité triangulaire)

$$|u_n - a| \leq |u_n - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ce qui est le résultat attendu. □

Au vu de ce qui précède, pour établir que toutes les suites de Cauchy (à valeurs dans $\mathbb{R}$) convergent, il suffit de montrer que toute suite (réelle) de Cauchy admet une valeur d'adhérence. Pour cela nous allons mettre en oeuvre un principe de dichotomie qui nous permettra de construire la sous-suite vérifiant la propriété voulue. C'est l'objet de la section suivante.

2.4.2 Principe de Dichotomie

Comme nous allons le voir, dès lors que nous avons à disposition une suite réelle bornée, il est possible de trouver une valeur d'adhérence.

Théorème 9 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de nombres réels alors il existe $l \in \mathbb{R}$ et une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que*

$$\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = l.$$

Démonstration. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que $u_n \in I = [0; 1]$ pour tout $n \geq 0$. Si u_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_p$, cela signifie que l'une d'entre elles (appelons la x_l) est prise une infinité de fois (i.e. il y a une infinité d'indices pour lesquels la suite vaut x_l). Ainsi, il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$u_{n_k} = x_l \quad \text{pour tout} \quad k \geq 0$$

et cela démontre notre affirmation. Supposons à présent que u_n prenne un nombre infini de valeurs. **Découpons l'intervalle I en deux part égales** : $I_1 = [0; \frac{1}{2}]$ et $I_2 = [\frac{1}{2}; 1]$. L'un de ses ensembles (I_1 par exemple) contient une infinité de termes de la suite et remarquons que la longueur de cette partie vaut $l(I_1) = \frac{1}{2}$. **Recommençons ce procédé et découpons I_1 en deux part égales dont l'une d'entre elles contient à nouveau une infinité de termes de la suite**. Par récurrence, nous obtenons une suite de segments emboités : pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_1 \subset I \quad \text{et} \quad l(I_n) = \frac{1}{2^n}.$$

13. Rappelons que $\phi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_1} \in I_1$, il existe alors $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \in I_2 \ldots$ Nos obtenons ainsi une sous-suite croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$u_{n_k} \in I_k \quad \text{pour tout} \quad k \geq 1.$$

Bien entendu ceci est possible car $\mathrm{Card}(I_k) = +\infty$ pour tout $k \geq 1$. Si a_k et b_k sont tels que $I_k = [a_k; b_k]$ nous avons donc

$$l(I_n) = b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad a_k \leq u_{n_k} \leq b_k \quad \text{pour tout} \quad k \geq 1.$$

Autrement dit, nous avons à disposition deux suites adjacentes $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$. Il existe donc $l \in I$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = l.$$

Le théorème des gendarmes 3 nous assure alors que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = l$. Ce qui conclu la démonstration. □

Remarque. En termes plus savants, nous venons de montrer que tout intervalle $[a; b]$ est un ensemble **compact** de $\mathbb{R}$. Ce type d'ensembles est particulièrement important en mathématiques car ils permettent d'obtenir des sous-suites qui convergent. La notion d'ensemble compact est généralement abordée en 3ème année en étudiant les propriétés topologiques d'un espace métrique (comme $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x; y) = |x - y|$). Nous y reviendrons sur ce genre de considération plus tard dans ce cours.

Nous pouvons enfin démontrer le théorème suivant qui caractérise les suites convergentes dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Théorème 10 ($\mathbb{R}$ est complet)**.** *Soit (u_n) une suite de nombre réels. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *(u_n) est une suite de Cauchy.*
2. *(u_n) est une suite convergente.*

Démonstration. Nous avons déjà démontré que les suites convergentes sont de Cauchy. Traitons la réciproque.

Soit (u_n) une suite de Cauchy. D'après la proposition 6, cette suite est bornée : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in [a, b].$$

La théorème de Bolzano-Weierstrass 9 nous assure qu'il existe une sous-suite $(n_k)_k$ et $l \in \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = l.$$

Autrement dit, la suite (u_n) admet une valeur d'adhérence. En outre, puisque (u_n) est de Cauchy, la proposition 8 nous assure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Nous avons donc bien établi que la suite (u_n) converge. □

2.4.3 Approximations

Nous allons voir qu'il est possible de combiner le principe de dichotomie avec des suites adjacentes pour obtenir des algorithmes simples permettant d'approcher une valeur tout en contrôlant l'erreur commise. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 2.4.3. Dans le chapitre précédent, nous avons rencontré un nombre irrationnel connu depuis l'antiquité : $\sqrt{2}$. Etant irrationnel, ce nombre s'exprime de manière plus compliquée qu'un nombre entier, décimal ou rationnel. Il est intéressant de se demander comment créer un algorithme permettant d'approcher cette valeur. En particulier, nous imposons que notre algorithme soit uniquement composé de nombre rationnels. Voici une méthode répondant à cette question, celle-ci repose sur le fait que $\sqrt{2}$ est solution de $x^2 - 2 = 0$.

Choisissons deux nombres a_0 et b_0 tels que

$$a_0^2 < 2 < b_0^2.$$

Par exemple,

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_0 = 2.$$

Déterminons ensuite le milieu[14] m_0 du segment $[a_0, b_0]$: $m_0 = \frac{b_0+a_0}{2}$. Ce nouveau nombre vérifie alors l'une des propriétés suivantes :

$$\text{soit} \quad m_0^2 < 2 \quad ; \quad \text{soit} \quad m_0^2 > 2.$$

Dans le premier cas, nous posons $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$; dans le second cas, nous posons $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$. De plus, par construction, nous avons

$$a_1^2 < 2 < b_1^2.$$

Nous reprenons ensuite notre procédé en déterminant $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et déterminons a_2 et b_2 suivant que m_1^2 soit plus grand ou plus petit que 2. Nous construisons ainsi deux suites de nombres (a_n) et (b_n), la première étant croissante et la seconde croissante vérifiant, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n^2 < 2 < b_n^2.$$

Autrement dit, la suite (a_n) approche $\sqrt{2}$ par défaut alors que la suite (b_n) l'approche par excès. En effet, par construction, l'écart entre ces deux suites est donné par

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

En conséquence, $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{2}$.

Remarque.
1. Le lecteur observera que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2. Si nous souhaitons une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près, il faudrait déterminer a_{10} et b_{10}. Lesquels valent
$$a_{10} = 1,4140625 \quad \text{et} \quad b_{10} = 1,415039062.$$
Nous verrons dans un autre chapitre une méthode plus efficace (plus rapide) pour approcher $\sqrt{2}$.

14. Le lecteur vérifiera que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $m_0 = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$.

3. Un instant de réflexion montre que le procédé de dichotomie peut aisément se généraliser. En effet, si f est une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés, le principe de dichotomie décrit plus haut (qui consiste à comparer le signe de $f(m_k)$ avec celui de $f(b)$ et $f(a)$ à chaque étape k) permet d'approcher une solution de $f(x) = 0$ contenue dans $[a, b]$. L'algorithme est cependant assez lent et l'implémentation sur machines peut-être mis en défaut (à cause de la précision de calcul d'un ordinateur) lorsque $f(m_k)$ se trouve très proche de 0.

2.5 Limites supérieure et inférieure

Plus tôt dans ce chapitre, nous avons rencontré des suites bornées qui ne convergeaient pas. Il est parfois intéressant d'obtenir tout de même des informations sur ce genre de suite. Par exemple, le théorème de Bolzano-Weierstrass 9 nous assure qu'il est possible d'obtenir une sous-suite extraite qui converge vers une valeur a. Nous pouvons nous demander s'il est possible de choisir la limite a la plus grande possible, ou au contraire la plus petite possible.

Exemple 2.5.1. Si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 0$, la suite est bornée et nous avons vu que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{2k} = 1 \quad \text{et} \quad u_{2k+1} = -1.$$

Et, comme la suite ne prend que -1 et 1 comme valeur, il n'est pas possible de faire mieux.

Bien que cela ait été mentionné dans la démonstration du théorème 4, définissons explicitement le supremum et l'infimum [15] de suites réelles.

Définition 2.5.1. *Soit (u_n) une suite de nombres réels. Nous définissons alors les deux quantités suivantes, pour tout $m \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{n \geq m} u_n = \sup\{u_n \quad ; \quad n \geq m\} \quad et \quad \inf_{n \geq m} u_n = \inf\{u_n \quad ; \quad n \geq m\}.$$

Remarque. 1. Ces quantités sont éventuellement infinies : si (u_n) n'est pas majorée alors $\sup_{n \geq m} u_n = +\infty$, si la suite n'est pas minorée $\inf_{n \geq m} u_n = -\infty$.

2. Lorsqu'elles sont finies, elles sont respectivement le plus petit des majorants et le plus grand des minorants. En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

- $u_n \leq \sup_{n \geq m} u_n$ pour tout $n \geq m$.
- si $M \in \mathbb{R}$ est tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq m$ alors $\sup_{n \geq m} u_n \leq M$.
- soit $M \in \mathbb{R}$ tel $M \leq \sup_{n \geq m}$ alors il existe $n_0 \geq m$ tel que $M < u_{n_0} \leq \sup_{n \geq m} u_n$.

Voyons ceci sur un exemple.

Exemple 2.5.2. Si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\} = \{-1; 1\}$. D'où

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = 1 \quad \text{et} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = -1.$$

15. Il s'agit d'une autre terminologie pour designer la borne supérieure ou inférieure.

1. Si $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$ alors $\{u_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. D'où

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = 1 \quad \text{et} \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0.$$

2. Si $u_n = n^2$ pour tout $n \geq 1$ alors $\{u_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, \ldots\}$. D'où

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = +\infty \quad \text{et} \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = 1.$$

Remarque. Comme nous pouvons à nouveau l'observer dans le deuxième exemple, il n'est pas vraiment correct de penser l'infimum ou le supremum comme un simple maximum ou minimum. En effet, dans le deuxième exemple $0 \notin \{u_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}$ alors qu'il s'agit de l'infimum.

Nous pouvons à présent définir les limites supérieure et inférieure d'une suite. Celles-ci représentent respectivement la plus grande et la plus petite valeur qu'il est possible d'atteindre à partir d'une sous-suite d'une suite donnée.

Définition 2.5.2. *Soit $(u_n)_{n\geq m}$ une suite de nombres réels.*

1. *Nous posons*

$$u_N^+ = \sup_{n\geq N} u_n.$$

Ceci permet de définir la limite supérieure de la suite (u_n) par

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{N\geq m} u_N^+.$$

2. *De manière similaire, pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons*

$$u_N^- = \inf_{n\geq N} u_n.$$

et définissons la limite inférieure de la suite (u_n) par

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{N\geq m} u_N^-.$$

Remarque. Nous utiliserons parfois les notations alternatives[16] suivantes :

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$$

pour désigner respectivement les limites supérieure et inférieure d'une suite.

Traitons quelques exemples pour mieux cerner ces nouvelles notions.

Exemple 2.5.3. 1. Soit (u_n) la suite définie (de manière informelle) par les termes

$$1.1, -1.01, 1.001, -1, 0001, 1.00001, \ldots$$

alors $u_1^+, u_2^+, u_3^+, \ldots$ correspondent aux termes

$$1.1, 1.001, 1.0001, 1.00001, 1.00001, \ldots$$

16. Ce sera notamment le cas dans le chapitre sur les séries.

En effet, par exemple, $u_1^+ = \sup_{n\geq 1}\Big\{u_1, u_2, u_3 \dots\Big\} = \sup_{n\geq 1}\big\{1.1, -1.01, 1.001\dots\big\} = 1.1$. De la même manière, $u_2^+ = \sup_{n\geq 2}\Big\{u_2, u_3 \dots\Big\} = \sup_{n\geq 2}\big\{-1.01, 1.001, \dots\big\} = 1.001$. Il est alors clair que la borne inférieure des termes décrits ci-dessus vaut 1, d'où $\limsup_{n\to+\infty} u_n = 1$.

De manière similaire, $u_1^-, u_2^-, u_3^-, \dots$ correspondent aux termes

$$-1.01, -1.01, -1.0001, -1.0001, -1.000001, \dots$$

La borne supérieure de ces éléments vaut -1, d'où $\liminf_{n\to+\infty} u_n = -1$. A titre informatif, le lecteur pourra comparer la valeur des ces limites supérieure et inférieure avec le supremum et l'infimum de la suite :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = 1.1 \quad \text{et} \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = -1.01$$

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \dots$$

alors $u_1^+, u_2^+, u_3^+, \dots$ correspondent à

$$+\infty, +\infty, +\infty, \dots$$

ainsi $\limsup_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De manière similaire, $u_1^-, u_2^-, u_3^-, \dots$ correspondent aux termes

$$-\infty, -\infty, -\infty, \dots$$

d'où $\liminf_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Soit (u_n) la suite définie par

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$$

Le lecteur vérifiera que $\limsup_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\liminf_{n\to+\infty} = 0$.
4. Soit (u_n) définie par

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Le lecteur vérifiera que $\limsup_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\liminf_{n\to+\infty} = +\infty$.
5. Si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\limsup_{n\to+\infty} u_n = +1$ et $\liminf_{n\to+\infty} = -1$. Ces valeurs correspondant à la plus grande et à la plus petite des valeurs d'adhérences (obtenues via sous-suites respectives $\phi(k) = 2k$ et $\psi(k) = 2k+1$).

Les exemples précédents suggèrent que la limite supérieure (respectivement inférieure) s'obtiennent grâce à un procédé qui permet de construire une sous-suite à partir des plus grandes valeurs (respectivement des plus petites valeurs) de la suite initiale. Voici un résultat qui confirme cette intuition et précise certaines propriétés des limites supérieures et inférieures.

Proposition 11. *Soit (u_n) une suite de nombre réels. Pour alléger les notations, notons $L^+ = \limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $L^- = \liminf_{n\to+\infty} u_n$* [17].

17. A priori, $L^+, L^- \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

1. *Soit $M > L^+$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < M$ pour tout $n \geq N$. De manière similaire, si $M < L^-$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$ pour tout $n \geq N$.*
2. *Pour tout $M < L^+$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n > M$. De manière similaire, si $M > L^-$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n < M$.*
3. *Nous avons toujours*
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq L^- \leq L^+ \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$
4. *Si l correspond à une valeur d'adhérence de la suite alors*
$$L^- \leq l \leq L^+$$
5. *La suite (u_n) converge si et seulement si $L^+ = L^-$. Dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} u_n = L^+$.*

Remarque. Faisons quelques commentaires pour éclaircir ce résultat.

1. La première assertion indique qu'à partir d'un moment la suite (u_n) finit par être majorée par M (respectivement minorée par M).
2. La seconde assertion montre que la suite dépassera (par excès ou par défaut) une infinité de fois M [18].
3. La troisième assertion justifie le fait que L^+ et L^- correspondent respectivement à la plus grande et la petite des valeurs d'adhérence.
4. La dernière assertion montre que pour converger, les limites supérieure et inférieure d'une suite doivent coïncider.

Démonstration. Etablissons les deux premières assertions.

1. Supposons que $M > L^+$. Dans ce cas, par définition de L^+, nous avons, pour tout $m \in \mathbb{N}$,
$$M > \inf_{n\geq m} u_n^+.$$
Par définition de la borne inférieure, il doit exister un entier $N \geq m$ tel que $M > u_N^+$. En conséquence, par définition de u_N^+, nous avons alors
$$M > \sup_{n\geq N} u_n.$$
Ce qui implique, par définition de la borne supérieure, que $M > a_n$ pour tout $n \geq N$. Le reste de la première assertion se démontre de la même manière.
2. Supposons que $M < L^+$. Forcément,
$$M < \inf_{N\geq m} u_N^+.$$
Fixons à présent $N \geq m$, nous avons alors
$$M < u_N^+.$$
Ce qui entraine, par définition de u_N^+, que $M < \sup_{n\geq N} a_n$. D'où l'existence d'un entier $n \geq N$ tel que $a_n > M$. Le reste de l'assertion s'obtient de manière similaire.

□

18. Ceci n'est pas étonnant puisque nous sommes en mesure de proposer une sous-suite qui converge vers L^+

2.6 Bilan

Au risque d'être redondant, voici les idées essentielles de chapitre :

- La monotonie et l'hypothèse de majoration ou minoration sont efficace pour démontrer qu'une suite converge.
- Le principe de dichotomie et les suites adjacentes.
- La caractérisation des suites convergentes dans $\mathbb{R}$ via le critère de Cauchy.
- L'utilisation des bornes supérieure et inférieure dans le contexte des suites numériques.

2.7 Aspects historiques

Voici quelques mots (cf. []) à propos de la construction historique de l'idée de suite et de convergence.

Le philosophe grec Zénon a proposé de nombreux paradoxes impliquant l'idée de limite. Nous y reviendrons dans le chapitre suivant. En Grèce toujours, des mathématiciens (dont Archimède) propose une méthode d'exhaustion qui repose sur l'utilisation d'une suite d'approximation permettant de déterminer une aire ou un volume. Nous retrouvons aussi des procédés de calculs infinis en Égypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au 1er siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie [19]

Ce genre d'objet se retrouve à partir du 17ème siècle avec la méthode des indivisibles (Pascal, Roberval,. . .). L'idée de convergence de suites est présentée dans l'encyclopédie de d'Alembert et Diderot (en 1751) :

Suite et série : se dit d'un ordre ou d'une progression de quantités qui croissent ou décroissent suivant quelques lois. Lorsque la suite va toujours en s'approchant de plus en plus de quelque quantité finie [. . .] on l'appelle suite convergente et si on la continue à l'infini, elle devient égale à cette quantité.

Il existe également un article de l'encyclopédie exposa l'idée de limite :

Limite. On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite que l'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche : en quelque sorte que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable. (...) À proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra.

Dans la suite de l'article, d'Alembert illustre d'ailleurs son propos par quelques exemples (notamment comment approcher l'aire d'un disque à partir de polygones inscrits dans celui-ci). Notons toutefois que la définition de limite que donne d'Alembert est peu précise : l'utilisation du mot

19. Nous reviendrons sur sa méthode dans un chapitre ultérieur.

« s'approcher »renvoie à une idée d'évolution dans le temps qui est étrangère aux mathématiques. La définition de d'Alembert, si nous la prenons à la lettre, est par ailleurs assez restrictive, car alors une grandeur ne peut approcher de sa limite qu'en y restant toujours inférieure ou toujours supérieure, sans avoir le droit d'osciller autour d'elle.

de nombreux mathématiciens (Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis) vont commencer à s'intéresser à la notion de suites numériques et leurs limites. Leur intérêt est compréhensible puisque les suites numériques sont les premiers objets mathématiques permettant de modéliser des phénomènes évoluant au cours du temps (ici, indexé par $\mathbb{N}$). Il semblerait d'ailleurs que Lagrange soit à l'origine de la notation indicielle. D'autres questions se posent : notamment l'étude des suites définies à l'aide d'une relation de récurrence, celle de Fibonacci par exemple. C'est dans son ouvrage, « Liber abaci », que l'on trouve le problème des lapins qui, se reproduisant tous les mois, voient leur nombre augmenter selon la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

Fibonacci ne parle toutefois pas de suite (le concept général est plus tardif) et ne fait que calculer les premiers termes de (u_n). L'expression « suite de Fibonacci »est due à un mathématicien du 19ème siècle, Édouard Lucas (1842–1891), qui en a étudié les propriétés.

Le mathématicien Euler a produit de nombreux résultats mathématiques sur les suites ou les séries numériques. Il avait conscience de la nécessité de démontrer rigoureusement la convergence des quantités impliquées vers leur limite. Cela ne l'a pas empêché de proposer des résultats paradoxaux comme

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1$$

de faire des opérations arithmétiques avec des quantités divergentes. Cela l'a néanmoins permis d'obtenir des résulats inattendus concernant, par exemple, la fonction zéta.

Finalement, l'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières dont le but est d'approcher, non plus des nombres, mais des fonctions. Dans la seconde moitié du xxe siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.

La définition moderne, celle reposant sur les quantificateurs (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe. . .) a été introduite par Bolzano en 1816. Ses travaux restèrent peu connus de la communauté mathématique. D'ailleurs, des mathématiciens renommés comme Cauchy utilisaient des définitions très vagues de la notion de limite.

En 1870, Weierstrass proposa des définitions semblables à celles de Bolzano afin de lever les ambiguïtés de ce qui existait à l'époque. Tout cela a permis d'obtenir des démonstrations rigoureuses de plusieurs théorèmes (celui des valeurs intermédiaires, celui de Bolzano-Weierstrass ou de Borel-Lebesgue) qui reposaient jusqu'à présent sur des propriétés intuitives des nombres réels.

2.8 Exercices

Exercice 2.1. En utilisant la définition 2.1.1, établir les résultats suivants :

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$./

Indication : écrire $-\epsilon \leq u_n - l \leq \epsilon$ afin de pouvoir obtenir une inégalité entre n et ϵ permettant ainsi de savoir à partir de quel rang N, le résultat désiré sera valable ; la partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ risque d'être utilisée pour déterminer N.

Exercice 2.2. Démontrer les assertions suivantes. Celles-ci sont indépendantes et peuvent être traitées séparément. L'inégalité triangulaire : $|a-b| \leq |a| + |b|$ valable pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ sera un outil essentiel.

1. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l et si $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers l' alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'.$$
2. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l alors l est unique. *Indication : faire un raisonnement par l'absurde.*
3. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 et si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tels que pour tout $n \geq N$,
$$|v_n| \leq M|u_n|.$$
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
4. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge (vers $l \in \mathbb{R}$) alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée : il existe $M > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n| \leq M.$$
5. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite *d'entiers* qui converge vers l alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang : il existe un nombre $p \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$,
$$u_n = p.$$

Exercice 2.3. Démontrer les assertions suivantes. Celles-ci sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l>0$ alors, à partir d'un certain rang $u_n > 0$.[20] *Indication : choisir une valeur particulière (dépendant de l) de ϵ dans la définition de la convergence d'une suite.*
2. Démontrer que si (u_n) tend vers $+\infty$ alors il existe un rang $N \geq 1$ tel que pour pour tout $n \geq N$, $u_n > 0$ et que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

20. En particulier, à partir de ce rang, la suite $\frac{1}{u_n}$ existe.

Exercice 2.4. Soit (u_n) une suite de nombres réels. Montrez que si les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exercice 2.5. Etudier la convergence des suites définies ci-dessous pour n≥ 1,

$$a_n = 2 - \frac{5}{n} \quad ; \quad b_n = 1 - n^2 \quad ; \quad c_n = \frac{\sin(2\pi/3)}{n} \quad ; \quad d_n = \frac{(-1)^{n^2}}{n} \quad ; \quad e_n = \frac{2^n}{5^{n-1}}.$$

Exercice 2.6. Etudier la convergence des suites définies ci-dessous pour n suffisamment grand,

$$u_n = \frac{3n^3 - 5n^2 - 7}{2n^3 - 8n - 11} \quad ; \quad v_n = \frac{70n^2 + 10n^3 + 50n + 170}{2n^3 - 90n - 110} \quad ; \quad w_n = \frac{n^5 - 30n^2 - 50\cos(n) - 750}{200n^3 + 18n^2 + 150}$$

et

$$x_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2 + n - 1} \quad ; \quad y_n = \frac{2n^2 + (-1)^n n}{7\sqrt{5}n + 2n^2} \quad ; \quad z_n = (-1)^n \frac{3n-2}{n+5}.$$

Exercice 2.7. 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_{:} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 0$.

(a) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Pensez à utiliser la quantité conjuguée. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

2. S'inspirer des questions précédentes pour étudier la convergence des suites lorsque $n \to +\infty$

$$v_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n^2 + 5n - 6} \quad ; \quad w_n = n^2\left(1 + \frac{1}{2n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right); \quad z_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

Exercice 2.8. 1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \sqrt{n}.$$

Indication : utiliser la formule du binôme de Newton combinée avec une minoration.

2. En déduire la limite, lorsque $n \to +\infty$, de

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Exercice 2.9. Soit a un nombre réel tel que $0 \leq a < 1$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, nous avons $1 - a^n \leq n(1-a)$ *Indication : factoriser le membre de gauche.*
2. Déduire de ce qui précède que.
$$0 \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$
3. Calculer la limite suivante
$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$
4. Comparer avec l'exercice précédent. Quelle conjecture pourrait être fait quant au comportement de $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n^p})^n$ en fonction de la valeur de p ?

Exercice 2.10. Soit (u_n) la suite définie par
$$u_n = 2\cos(1/n^2) + 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer que pour tout entier $1 \leq k \leq n$,
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
3. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq 3\sqrt{n+1} - 5$. En déduire la limite de la suite (u_n).
4. Déterminer $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq 235$.

Exercice 2.11. Pour $n \geq 1$, définissons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite
2. Pour tout $n \geq 1$, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
3. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 2.12. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. Démontrer que
$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n$$
à condition que la somme du membre de droite ne soit pas de la forme $+\infty - \infty$.