Chapitre 3

Séries numériques

Dans ce chapitre nous allons étudier des séries numériques. Plus précisément, étant donné une suite de réels **positifs** $(u_n)_{n\geq 0}$, nous allons nous focaliser sur les suites de la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

que nous nommerons **séries numériques**. En particulier, nous allons nous intéresser à la convergence de la suite S_n lorsque $n \to +\infty$; nous dirons que u_n est **le terme général** de la série et S_n correspond aux **sommes partielles de la série**, $\sum u_k$ est une notation pour désigner la série de terme général u_k. Les arguments principaux qui seront mis en oeuvre sont les suivants :

- monotonie et positivité ;
- arguments de comparaison.

Le lecteur pourrait se demander pour quelles raisons les séries numériques sont utilisées. Voici quelques éléments de réponses :

- puisque nous sommes en mesure de le faire, pourquoi ne pas essayer ?
- ces objets mathématiques ont été source de réflexion de mathématiciens grecs. Par exemple, Zénon d'Élée (né vers 490 et mort vers 430 av. J.-C.) a proposé plusieurs paradoxes. Décrivons en quelques mots l'un d'entre eux. Imaginons que nous placions une cible à 2 mètres de distance et que tirions une flèche en sa direction. Cette flèche mettra un certain laps de temps pour parcourir la moitié de la distance. Il faudra ensuite un certain temps pour parcourir la moitié de la distance restante et de nouveau un certain temps pour la moitié de la distance encore restante, etc. Pour Zénon, nous nous retrouvons à additionner une infinité de durées non nulles, il lui semblait inconcevable qu'une infinité de distances (toutes finies) puisse être parcourue en un temps fini. C'est pourquoi, il conclu que la flèche n'atteindra jamais la cible. Finalement, Zénon s'est interrogé quant au résultat de la somme suivante

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

- les séries numériques peuvent se voir comme des versions discrètes des intégrales (cf. chapitre **??**). La théorie de l'intégration est un outil incontournable en mathématiques qui intervient dans de nombreux domaines (notamment la physique). Il semble alors assez naturel d'étudier au préalable une version discrète qui s'avère moins complexe à appréhender.
- Comme nous le mentionnerons plus tard, il n'est pas difficile de généraliser l'étude des séries numériques à celles des séries et suites de fonctions. En quelques mots, cela revient étudier des séries dont le terme général est de la forme $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 0}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Prenons un élément $x \in \mathbb{R}$ quelconque et supposons que la suite $f_n = f_n(x)$ converge vers une limite $f(x)$ lorsque $n \to +\infty$. Une question naturelle se pose : parmi les propriétés satisfaites (continuité, dérivabilité, intégrabilité,. . .) par les fonctions f_n lesquelles sont conservées (par f) en passant à la limite ? Pour cela, il conviendra de faire la différence entre une convergence (lorsque $n \to +\infty$) uniforme en x ou ponctuelle (dépendant de la valeur de x choisi). Ce genre de fonction apparait alors naturellement dans l'étude (ponctuelle) des séries de Fourier permettant de décomposer un signal analogique sous la forme d'un empilement de fonctions trigonométriques. Ceci sera développé dans le chapitre **??**.
- Le cas suivant a aussi été laissé de côté : soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n) \in n \in \mathbb{N}$ une suite d'éléments de E. Que dire de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$? Nous aimerions que cette somme converge vers un élément de E. En outre, il semble naturel de s'interroger : quels sont les outils, que nous allons employer dans ce chapitre pour étudier les séries numériques dans $\mathbb{R}$, qui restent efficace pour traiter la convergence de série dans ce nouveau contexte ? A titre d'exemple, une condition suffisante permettant d'établir la convergence de $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est de montrer que la série numérique $\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ converge dans $\mathbb{R}$. Nous laissons le lecteur réfléchir à ces questions.

3.1 Propriétés élémentaires

Plaçons nous dans $\mathbb{R}$ muni de la distance induite par la valeur absolue. Cet espace est complet (cf. [**?**]) : toute suite de Cauchy est donc convergente[1]. La proposition suivante reformule ceci en tirant parti du fait que les séries impliquent des sommes.

Proposition 12 (Critère de Cauchy)**.** *Une série $(S_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant m \geqslant N$,*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| \leq \varepsilon \tag{3.1.1}$$

Remarque. 1. Etant donnée une série convergente, la proposition indique qu'à partir d'un certain rang n'importe quelle portion de la série est aussi petite que nous le souhaitons.

2. Ce critère fournit une condition nécessaire pour qu'une série numérique converge : en choisissant $n = m$ dans (3.1.1), nous en déduisons que nécessairement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Cependant, ce critère est très grossier et ne permet pas de détecter certaines séries divergentes dont le terme général tend pourtant vers 0.

1. Ceci a été établi dans la chapitre précédent, cf. þéorème 10.

3. Ce critère indique aussi que le reste d'une série convergente doit être aussi petit que l'on souhaite : pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ nous avons

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k \leq \epsilon \quad \iff \quad \lim_{n \to +\infty} R_n = 0.$$

3.2 Série et monotonie

Comme nous l'avons annoncé plus tôt, nous allons tirer parti de la **propriété de monotonie** satisfaite par la série S_n. Puisque S_n est une somme de termes positifs nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \leqslant S_{n+1}.$$

Remarque. Comme la suite S_n est croissante, nous en déduisons qu'il suffit qu'elle soit aussi majorée pour la série converge.

Cette monotonie permet aussi de mettre en place des **arguments de comparaison**[2] entre deux séries à partir de leurs termes généraux.

Proposition 13 (Comparaison)**.** *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des suites numériques positives telles que, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$u_n \leq v_n \quad \textit{pour tout} \quad n \geq N.$$

1. *Si v_n est le terme général d'une série convergente alors $\sum u_k$ converge également.*
2. *Si u_n est le terme général d'une série divergente alors $\sum v_k$ diverge également.*

Cette proposition suggère d'établir, dans un premier temps, une **liste de séries numériques de références** à laquelle nous ferons des comparaisons afin de déterminer la nature (convergente ou divergente) d'une série donnée.

Dans un second temps, lorsque nous voudrons mettre en œuvre des comparaisons nous utiliserons les notations[3] suivantes : étant donné deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, nous dirons que

1. u_n est **dominée** par v_n lorsque $n \to +\infty$ s'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$

$$|u_n| \leq C|v_n|.$$

   Nous notons ceci $u_n = O(v_n)$ ce qui se lit « u_n est un grand o de v_n ».
2. u_n est **négligeable** devant v_n lorsque $n \to +\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

   ce qui sera noté $u_n = o(v_n)$ et se lit « u_n est un petit o de v_n ».

2. En fait, nous cherchons à utiliser les résultats généraux qui permettent d'étudier la convergence de suites numériques. L'objectif est de tirer parti du fait que la suite (S_n) est forcément croissante.
3. introduites par Landau

3. u_n est **équivalente** à v_n lorsque $n \to +\infty$ si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$
$$u_n - v_n = o(v_n).$$
Nous noterons ceci par $u_n \sim v_n$.

Remarque. 1. Notons que la notion de négligeable est plus forte que la notion de domination : si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$, la réciproque est fausse.

2. Si $v_n \neq 0$ lorsque $n \geq N$, il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ pour démontrer que $u_n \sim v_n$.

Combinés avec le théorème de comparaison ceci nous assure alors que

- lorsque $u_n = O(v_n)$ avec v_n le terme général d'une série convergente, nous en déduisons que $\sum u_n$ converge également.
- lorsque $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature : elles convergent ou divergent simultanément.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 3.2.1. Admettons temporairement que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

1. Si $u_n = e^{-n^4}$ alors $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^4} = 0$ donc u_n est négligeable face à $\frac{1}{n^2}$. Autrement dit $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où, par comparaison entre séries **à termes positifs**, $\sum_{n\geq 1} u_n < +\infty$.
2. Observons que si $x \to 0$ alors $e^x - 1 \sim x$ car $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Ainsi, $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$ lorsque $n \to +\infty$. La série de terme général u_n est donc de même nature que la série de terme général $v_n = \frac{1}{n}$. Cette dernière étant divergente, nous en concluons que $\sum_{n\geq 1} u_n = +\infty$.

Remarque. Implicitement, dans le deuxième exemple, nous avons utilisé le fait que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \sim f'(0)$ lorsque $x \to 0$. Ceci sera repris dans le chapitre portant sur les développements limités.

Voyons maintenant comment établir une liste de séries de références dont nous connaitrons la nature et auxquelles nous pourrons procéder à des comparaisons.

3.3 Séries géométriques

Les séries géométriques sont obtenues en prenant comme terme général celui d'une suite géométrique. Plus précisément, soit $u_n = u_0 \times q^n$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et considérons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Cet exemple est suffisamment simple pour que l'intégralité des calculs soient explicites.

Proposition 14 (Convergence série géométrique)**.** *La convergence de la série géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$ s'exprime simplement en fonction de la raison q* [4] *:*

- *si $0 \leq q < 1$ alors la série converge,*

4. Ici nous considérons seulement $q \in \mathbb{R}_+$ pour avoir des termes positifs.

- *si $q \geqslant 1$ alors la série diverge.*

Démonstration. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que $u_0 = 1$. Lorsque $q = 1$, nous avons $u_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ la série diverge grossièrement puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Supposons à présent que $q \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} u_k = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}$$

puisque tous les termes de la somme s'annulent sauf le premier et le dernier.[5] C'est pourquoi, puisque $q \neq 1$, nous obtenons

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Pour conclure, il suffit d'étudier (en fonction de q) la convergence de $1 - q^{n+1}$ lorsque $n \to +\infty$. □

Remarque. Concernant les autres valeurs de q, nous laissons le soin au lecteur de vérifier que la série géométrique converge vers $\frac{1}{1-q}$ lorsque $-1 < q \leq 0$ tandis que la série diverge grossièrement si $q \geq -1$.

Exemple 3.3.1. Finalement le problème de Zénon évoqué en début de chapitre consiste à étudier la série $\sum 2^{-n}$. Puisque $q = \frac{1}{2} < 1$ le théorème précédent nous assure que la série converge. En outre,

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Autrement dit, la flèche atteint bien la cible.

Comme nous allons le voir, de nombreux résultats théoriques sont obtenus en **comparant le terme général d'une série donnée avec celui d'une série géométrique**. Voyons ce qui se produit lorsqu'une suite vérifie (presque) la relation de récurrence satisfaite par une suite géométrique.

Théorème 15 (Critère de d'Alembert)**.** *La série $\sum u_k$ de termes positifs*

- *converge si $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.*
- *diverge si à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.*

Remarque. Lorsque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ nous ne pouvons pas conclure, les deux situations peuvent se produire.

Le lecteur pourra s'étonner de trouver une limite supérieure (notée $\overline{\lim}$) dans l'énoncé plutôt qu'une limite. La raison derrière ceci est que la limite supérieure existe toujours (en tant qu'élément de $[-\infty, +\infty]$) au contraire d'une limite (laquelle est forcément finie) dont l'existence devrait être justifiée au préalable. Par exemple, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe pas alors que $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(-1)^n = 1$.

5. Le terme « téléscopique » est souvent rencontré dans ce genre de cas de figure.

Démonstration. Soulignons à nouveau que l'idée principale est de comparer, à partir d'un certain rang, le terme général u_n avec celui d'une série géométrique. Cette comparaison sera faite en utilisant la formulation par récurrence d'une suite géométrique. Dans ce qui suit, nous notons $L = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Supposons que $L < 1$ et considérons q tel que $L < q < 1$. En utilisant la proposition 11, nous savons qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_{n+1} \leq u_n \times q.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est « sous-géométrique » à partir du rang N. En outre, en détaillant ceci pour différentes valeurs de $n \geq N$, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} u_{N+1} & \leq & u_N \times q \\ u_{N+2} & \leq & u_{N+1} \times q \\ u_{N+3} & \leq & u_{N+2} \times q \\ & \vdots & \\ u_n & \leq & u_{n-1} \times q. \end{array}$$

Il suffit ensuite de multiplier ces inégalités pour obtenir, après simplification, que

$$u_n \leq u_N \times q^{n-N} \quad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Autrement, dit,

$$u_n \leq C \times q^n \quad \text{avec} \quad C = C_N = u_N \times q^{-N} \in \mathbb{R}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser un argument de comparaison (cf. proposition 13) : la série $\sum q^n$ converge (car $0 < q < 1$) donc la série $\sum u_k$ converge également.

Si maintenant il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

alors la suite $(u_n)_{n\geq N}$ est croissante. En particulier, si $\tilde{N}$ est l'indice (à partir du rang N) du premier terme non nul de la suite, nous avons pour tout $n \geq N$,

$$u_n \geq u_{\tilde{N}} > 0$$

et le terme général ne tend pas vers 0. La série diverge grossièrement. □

Exemple 3.3.2. 1. Etudions la série de terme général $u_n = \binom{n}{3} 2^{-n}$. Il s'agit bien d'une série à termes positifs et

$$u_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 2^{-n} = O(n^3 \times 2^{-n})$$

Il existe donc une constante $C > 0$, telle que pour n assez grand l'inégalité suivante soit vérifiée

$$u_n \leq C \times n^3 \times 2^{-n}$$

et, par croissances comparées, cette dernière tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$: i.e. la série ne diverge pas grossièrement[6]. Mettons à présent le critère de d'Alembert en oeuvre : après simplifications, nous trouvons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n-2} \times \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$

La série est donc convergente.

2. Faisons de même avec la série dont le terme général est donnée par $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Evidemment, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Pourtant,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et le critère de d'Alembert ne nous permet pas de conclure.

Remarque. Nous verrons ultérieurement que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Il s'agit des séries dites de Riemann.

Comme nous allons le voir, il est possible d'obtenir un deuxième critère de convergence lorsque nous utilisons la forme explicite d'une suite géométrique comme moyen de comparaison.

Théorème 16 (Critère de Cauchy)**.** *Soit une série $\sum u_k$ de termes positifs et posons*

$$\alpha = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}.$$

Alors la série

- *converge si $\alpha < 1$.*
- *diverge si $\alpha > 1$.*

Remarque. A nouveau, lorsque $\alpha = 1$, il n'est pas possible de conclure. L'utilisation de la limite supérieure se justifie comme pour le critère de d'Alembert.

Démonstration. L'idée est d'observer qu'à partir d'un certain rang, la suite u_n **se comporte quasiment comme une série géométrique**. Soit $\alpha < q < 1$ alors, d'après la proposition 11, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sqrt[n]{u_n} < q \quad \Longleftrightarrow \quad u_n < q^n.$$

Un argument de comparaison permet alors de conclure : lorsque $0 < q < 1$, la série $\sum q^n$ converge ce qui entraine la convergence de la série $\sum u_n$ (d'après la proposition 13).

6. Ceci est un réflexe à avoir lors de l'étude de la nature d'une série numérique : vérifier rapidement que le terme général est positif et tend vers 0.

Si maintenant $\alpha > 1$, par définition de la limite supérieure (la plus grande des valeurs d'adhérence d'une suite) nous pouvons trouver une sous-suite u_{n_k} telle que

$$\lim_{k \to +\infty} u_{n_k} = \alpha.$$

Ainsi, par hypothèse, à partir d'un certain rang nous avons

$$u_{n_k} > 1$$

ce qui montre que $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$. La série diverge grossièrement. $\square$

Exemple 3.3.3. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que le terme général converge bien vers zéro lorsque $n \to +\infty$ et qu'il s'agit bien d'une suite positive.

1. Considérons $u_n = \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$ et appliquons le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n+1}{3n+4} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} < 1.$$

   La série est donc convergente.
2. Si maintenant, $u_n = \frac{2^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ alors

$$\sqrt[n]{u_n} = 2e^{-\frac{\alpha}{n} \ln n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2 > 1$$

   puisque, par croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. La série est donc divergente.
3. Le lecteur est invité à vérifier que le critère de Cauchy est inutilisable pour la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Exercice à traiter : 3.1

Malheureusement, bien que simple d'utilisation, les critères proposés ci-dessus ne sont pas très performants. Comme nous l'avons vu, il est pas possible de déterminer la nature des séries dont le terme général vaut $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. La raison derrière ceci est que l'argument employé pour montrer, via ces critères, qu'une série diverge est de simplement observer que $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$.

Nous verrons en exercice que le critère de Cauchy a une portée un peu plus générale que le critère de d'Alembert : si le premier ne permet pas de conclure, le deuxième ne sera d'aucune aide. Nous verrons également en exercice des analyses plus fines (notamment la règle de Raab-Duhamel) permettant de préciser le comportement du terme général afin de conclure à la convergence ou la divergence d'une série.

Exercices à traiter : 3.2 à 3.4

Voyons comment obtenir d'autres méthodes de comparaison quitte à ajouter des hypothèses sur le terme général de la série.

3.4 Décroissance et regroupement par paquets

Bien souvent, en plus d'être positif, le terme général d'une série vérifie une **propriété de décroissance**. Voyons quelles conséquences a cette hypothèse supplémentaire.

Théorème 17. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de termes positifs alors les séries ci-dessous sont de même nature*

$$\sum_{n\geq 0} u_n \quad et \quad \sum_{k\geq 0} 2^k u_{2^k}.$$

Démonstration. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k}.$$

Nous allons montrer que les séries S_n et T_n sont de même nature : elles convergent ou divergent simultanément. Pour démontrer ce résultat, il suffit d'observer que S_n et T_n sont comparables.

Si $n < 2^k$ alors

$$\begin{aligned} S_n &\leq u_1 + (u_2 + u_3) + u_4 + \ldots + (u_{2^{k-1}} + \ldots u_{2^k}) \\ &\leq u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \ldots 2^{k-1} u_{2^{k-1}} \\ &\leq T_k. \end{aligned}$$

De manière similaire, si $n > 2^k$ alors

$$\begin{aligned} S_n &\geq u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + \ldots + (u_{2^{k-1}+1} + \ldots u_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2} u_1 + u_2 + 2u_4 + \ldots 2^{k-1} u_{2^k} \\ &\geq \frac{1}{2} T_k. \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Comme nous allons le voir, le résultat précédent est assez efficace.

Exemple 3.4.1 (Séries de Riemann)**.** Reprenons l'étude des séries de Riemann dont le terme général est donné par $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Puisqu'il s'agit d'une suite décroissante de termes positifs, il suffit d'étudier la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{2^{n\alpha}}.$$

Or, $\frac{2^n}{2^{n\alpha}} = (2^{1-\alpha})^n$. Il s'agit du terme général d'une série géométrique de raison $q = 2^{1-\alpha} > 0$. Il est aisé de vérifier que

$$q < 1 \iff \alpha > 1.$$

En résumé, nous venons de démontrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque. Nous étudierons en exercice les séries de Bertrand. Celles-ci sont de la forme $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^p}$ avec $p \geq 0$. Le lecteur impatient peut chercher à démontrer que ces séries convergent si et seulement si $p > 1$.

Exercice à traiter : 3.5

Finalement, le théorème 17 fonctionnait grâce à la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et a permis de rassembler les termes de la série par paquets. Cette idée peut se généraliser et donne lieu à un résultat très utile[7] (mais moins simple d'utilisation). Au préalable, il est nécessaire d'énoncer un résultat intermédiaire. Celui-ci doit être compris comme **une formule d'intégration par partie discrète** dans laquelle A_n joue le rôle de primitive de a_n.

Lemme 18 (Transformation d'Abel)**.** *Etant données deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$, pour tout $0 \leq p \leq q$, nous avons*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

où $A_{-1} = 0$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ lorsque $n \geq 0$.

Démonstration. Observons les égalités suivantes :

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1}.$$

La conclusion s'ensuit puisque le dernier membre (ci-dessus) vaut précisément

$$\sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} - A_{p-1} b_p.$$

□

La transformation d'Abel est particulièrement utile lorsqu'elle est combinée à une propriété de décroissance.

Théorème 19 (Règle d'Abel)**.** *Etant données deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$. Supposons que*

1. *les sommes partielles A_n de la série $\sum a_n$ sont bornées par une constante $M > 0$,*
2. *la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.*

alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Démonstration. L'objectif de la preuve est de montrer que la série $\sum a_n b_n$ vérifie le critère de Cauchy 12. A cet effet, soit $\varepsilon > 0$ et considérons[8] $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$b_n < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Pour tout $q \geq p \geq N$, la transformation d'Abel nous assure que

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \right|.$$

7. La règle d'Abel est notamment pratique lors de l'étude de séries entières (cf. [?])
8. Ceci est possible puisque $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Puisque la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, nous savons que $b_n - b_{n+1} \geq 0$. Il est alors possible de majorer le membre de droite (ci-dessus) en utilisant l'hypothèse portant sur A_n :

$$\left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1}b_p\right| \leq M\left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right| = 2Mb_p \leq 2Mb_N < \varepsilon$$

où la dernière égalité est obtenue en simplifiant la somme télescopique. □

Remarque. 1. Notons en passant que la démonstration fournie une estimation du reste de la série : pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons l'estimation

$$\left|\sum_{n\geq p} a_n b_n\right| \leq 2Mb_p.$$

2. La règle d'Abel est d'un usage fréquent lorsque le terme général est de la forme $u_n = (-1)^n b_n$ avec (b_n) une suite décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Ce corollaire est désigné par l'appellation **critère des séries alternées** .

Voyons ce nouveau résultat en application. Notons au passage qu'il permet de considérer des séries dont les termes ne sont pas forcément positifs.

Exemple 3.4.2. 1. Soit $u_n = (-1)^n/n$. Pour appliquer le théorème d'Abel 19. Il suffit de montrer que $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est uniformément bornée. En effet, pour tout $n \geq 0$, puisqu'il s'agit des sommes partielles d'une série géométrique nous avons

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \leq 1.$$

La série est donc convergente.

2. Soit $u_n = a_n e^{in\theta}$ avec $(a_n)_{n\geq 0}$ une série décroissante convergeant vers 0 et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. A nouveau, il convient de majorer uniformément

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} = M_\theta$$

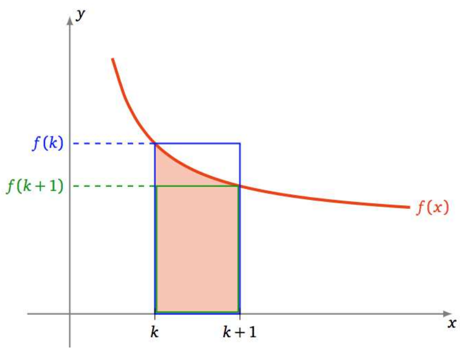
puisqu'il s'agit des sommes partielles d'une série géométrique de raison $q = e^{i\theta}$. Ce genre de série sera de nouveau étudié dans le cadre de l'analyse de Fourier.

Exercices à traiter : 3.6

Voici un dernier résultat reposant sur la monotonie du terme général de la série. Ce résultat dresse un pont entre l'étude des séries numériques et celle des intégrales généralisées.

Théorème 20 (comparaison séries et intégrales généralisées)**.** *Soit* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *une fonction décroissante et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, posons* $u_n = f(n)$*. Alors la série* $\sum u_n$ *et l'intégrale généralisée* $\int_0^\infty f(x)dx$ *sont de même nature.*

Démonstration. L'idée de la démonstration réside dans le schéma ci-dessus qui montre qu'il est possible d'encadrer l'aire sous la courbe de la fonction f par une somme d'aire de rectangles. En effet, lorsque $k \leq x \leq k+1$, nous avons la figure suivante



Autrement dit,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

puisque les rectangles sont de largeur 1. Il ne reste plus qu'à additionner ces inégalités de $k = 0$ jusqu'à $n - 1$, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

ce qui termine la preuve. □

Voyons ceci en application.

Exemple 3.4.3.

1. Le lecteur est invité à retrouver le résultat concernant les séries de Riemann en utilisant le procédé de comparaison entre séries et intégrales généralisées.
2. Nous savons que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Il est intéressant de savoir à quelle vitesse cela se produit. Pour cela, appliquons le théorème de comparaison séries et intégrales généralisées avec $f(t) = \frac{1}{t}$; nous noterons H_n les sommes partielles de la série harmonique, i.e.
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Soit $n \geq 1$, en reprenant les arguments de la démonstration (i.e. en comparant l'aire des rectangles issus de la série et l'aire sous la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$), nous trouvons d'une part que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln n$$

d'où $H_n \leq 1 + \ln n$. En outre, d'autre part, nous avons aussi

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq H_n$$

d'où $\ln n \leq H_n$. En résumé, nous venons de montrer que

$$H_n \sim \ln n \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Il se trouve qu'une étude plus approfondie (cf. []) permet de montrer que la suite

$$H_n - \ln n$$

converge, lorsque $n \to +\infty$, vers une limite finie appelée constante d'Euler-Mascheroni (notée γ).

Exercices à traiter : 3.7.

3.5 Thèmes non abordés

De nombreux thèmes n'ont pas été abordé :

- la notion plus contraignante de **convergence absolue** qui permet d'étudier les séries dont les termes $(u_n)_{n \geq 0}$ ne sont pas positifs en étudiant la série $\sum |u_n|$: l'inégalité triangulaire permet de montrer le résultat suivant **la convergence absolue entraine la convergence la série**. Ceci peut être un outil efficace, observons toutefois que la réciproque est fausse comme cela peut s'observer avec la série de terme générale $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. L'idée de convergence absolue se généralise très bien à l'étude de la convergence de séries dans un espace vectoriel normé : il suffit de remplacer la valeur absolue par la norme.
- qu'est-il possible de dire des propriétés algébriques des séries : si $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont les termes généraux de deux séries convergentes, que pouvons-nous dire de la nature de la série [9] $\sum c_n$ où, pour tout $n \geq 0$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad ?$$

- est-il possible de modifier l'ordre de sommation d'une série ? Plus précisément, si σ est une permutation de l'ensemble $\{0, \ldots, n\}$, que dire de la convergence de $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$? En particulier, à quelles conditions la modification de l'ordre de termes n'a aucune influence sur la convergence de la série ?

9. $(c_n)_{n \geq 0}$ est appelé produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$

- ...

Le lecteur trouvera des réponses à ces problématiques dans [**?**].

3.6 Exercices

Exercice 3.1. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ dont le terme général est donné par :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.
3. $u_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$.
4. $u_n = \frac{n!}{(2n)!}$.
5. $u_n = \frac{\ln n}{2^n+1}$.
6. $u_n = \frac{2\times 4\times 6\times (2n)}{n^n}$.
7. $u_n = \left(\frac{7n-2}{3n+1}\right)^n$.
8. $u_n = \frac{2^n}{e^n-1}$.
9. $u_n = \ln(1+n^\alpha)$ avec $\alpha > 0$.
10. $u_n = \frac{\alpha^n}{n^2}$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 3.2 (Comparaison critère de Cauchy et de d'Alembert). L'objectif est de démontrer le résultat suivant : étant donné une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs,

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{3.6.1}$$

et

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{3.6.2}$$

1. Démontrer (3.6.2). Poser $\alpha = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
   (a) Traiter le cas $\alpha = +\infty$.
   (b) Supposons désormais que $\alpha < +\infty$ et considérons $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha + \epsilon.$$
   (c) En déduire que pour tout $n \geq N$,
   $$a_c \leq a_N(\alpha+\epsilon)^{n-N}.$$
   (d) En déduire que $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_N(\alpha+\varepsilon)^{-N}}(\alpha+\varepsilon)$ et $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \beta$.
   (e) Conclure.
2. S'inspirer des questions précédentes pour démontrer (3.6.1).

Exercice 3.3 (règle de Raab-Duhamel I)*.* L'objectif de cet exercice est de préciser la règle de d'Alembert lorsque le comportement asymptotique du rapport entre deux termes consécutifs est connu.

Partie A :

Soient (u_n) et (v_n) des séries à termes positifs tels qu'il existe un rang N à partir duquel,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

1. Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que $u_n \leq M v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Indication : étudier la monotonie de la suite* $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
2. Si $\sum_n v_n < +\infty$, déduire de la question précédente que $\sum_n u_n < +\infty$.
3. Si $\sum_n u_n = +\infty$, déduire de la question précédente que $\sum_n v_n = +\infty$.

Partie B :

Soit (u_n) une suite de termes positifs telle qu'il existe un rang N à partir duquel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ avec $\beta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Si (t_n) est une suite de termes positifs telle que $t_n = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\mu > 0$ lorsque $n \to +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $t_n \geq \frac{\mu}{2n}$ pour tout $n \geq N$.
3. Etude de cas :
   (a) Que se passe-t-il si $\alpha < 0$? *Indication : utiliser la question précédente et le critère de d'Alembert.*
   (b) Si maintenant $\alpha > 1$. En choisissant convenablement β et en utilisant les questions précédentes, montrer que $\sum_n u_n$ converge. *Indication : étudier le signe de* $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *à partir d'un certain rang.*
   (c) Si $0 < \alpha < 1$. En choisissant convenablement β et en utilisant les questions précédentes, montrer que $\sum_n u_n$ diverge.
   (d) En considérant les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ montrer qu'il n'est pas possible de conclure lorsque $\lambda = 1$.

Exercice 3.4 (règle de Raab-Duhamel II)*.* Soit (u_n) une suite telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et (r_n) le terme général d'une série absolument convergente[10] tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + r_n$$

10. i.e. $\sum |r_n| < +\infty$

Posons également $w_n = n^\lambda u_n$.

1. Démontrer que tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
2. En déduire que (w_n) converge dans $\mathbb{R}$. *Indication : étudier* $\sum \big(\ln(w_{n+1} - \ln(w_n)\big)$.
3. A l'aide de ce qui précède, donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur λ assurant la convergence de $\sum u_n$.
4. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum b_n$.

Exercice 3.5. 1. Séries de Bertrand : étudier en fonction de $p > 0$ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)p}$ lorsque $n \geq 2$.

2. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln n \times \ln(\ln n)}$. En particulier, déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est définie.
3. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln n \times [\ln(\ln n)]^2}$. En particulier, déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est définie.
4. En utilisant des équivalents déterminer la nature des séries dont le terme général est donné par
   (a) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$.
   (b) $u_n = \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Exercice 3.6. Soit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Justifier que les sommes partielles $\sum_{k=0}^n (-1)^k$, $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta))$ sont uniformément bornées.
2. En utilisant le critère d'Abel, démontrer que les séries suivantes sont convergentes

$$\sum \frac{(-1)^k \cos k}{k} \quad ; \quad \sum \frac{\sqrt{k+1}}{k} \sin(k\theta) \quad ; \quad \sum \frac{1}{e^{ik\theta} \ln k}.$$

Exercice 3.7 (Constante d'Euler-Mascherroni). Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$$

Nous proposons d'étudier la série de terme général a_n afin de montrer qu'elle converge. Pour cela, définissons $(S_n)_{n\geq 1}$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

et posons $H_0 = 0$ ainsi que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \geq 1$.

1. Soit $n \geq 1$, en encadrant l'intégrale $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$, montrer que
$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
3. Vérifier que pour tout $n \geq 1$,
$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{t+n} dt.$$
puis montrer que pour tout entier $n \geq 2$,
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leq a_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$
4. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n > 1$. Puis montrer que pour tout entier $n > 1$:
$$\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$
5. Conclure qu'on a le développement asymptotique (lorsque $n \to +\infty$) suivant pour la suite $(H_n)_{n\geq 1}$:
$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
6. Pour tout $n \geq 1$, $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$. Montrer que
$$0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}.$$
7. Déterminer un entier$n \geq 1$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

Exercices théoriques

Exercice 3.8. Montrer que si la série à termes positifs $\sum u_n$ converge il en est de même de la série

$$\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$$

Exercice 3.9. Soit $\sum u_n$ une série convergente et $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite monotone et bornée. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

Exercice 3.10. Soit $\sum u_n$ une série divergente à termes positifs ; nous noterons les sommes partielles par $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Prouver que la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ diverge.
2. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$
$$\frac{u_{N+1}}{S_{N+1}} + \ldots + \frac{u_{N+k}}{S_{N+k}} \geq 1 - \frac{S_N}{S_{N+k}}$$
En déduire la divergence de $\sum \frac{u_n}{S_n}$. *Indication : N étant fixé, déterminer* $\lim_{k\to+\infty} S_{N+k}$ *afin de choisir k suffisamment grand de sorte que* $\frac{1}{S_{N+k}} < \frac{1}{2S_N}$ *et utiliser le critère de Cauchy.*
3. Etablir que pour tout $n \geq 2$,
$$\frac{u_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$
En déduire que la série $\sum \frac{u_n}{(S_n)^2}$ converge.

Exercice 3.11. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs ; nous noterons le reste de la série par $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

1. Montrer que si $m < n$,
$$\frac{u_m}{R_m} + \ldots + \frac{u_n}{R_n} \geq 1 - \frac{R_n}{R_m}$$
En déduire la divergence de $\sum \frac{u_n}{R_n}$. *Indication : N étant fixé, déterminer* $\lim_{n\to+\infty} R_n$ *afin de choisir n suffisamment grand de sorte que* $R_n < \frac{R_m}{2}$ *et utiliser le critère de Cauchy.*
2. Etablir que pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{u_n}{\sqrt{R_n}} < 2\big(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}}\big).$$
En déduire que la série $\sum \frac{u_n}{\sqrt{R_n}}$ converge.

Exercice 3.12. Etant donné une suite $(u_n)_{n\geq 0}$, nous définissons sa moyenne de Césaro par
$$\sigma_n = \frac{u_0 + \ldots + u_n}{n+1}.$$

1. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = l$.
2. Que dire de la réciproque ?
3. Est-il possible de trouver une suite (u_n) à termes strictement positifs telle que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$?

4. Si $a_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Montrer que

$$u_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k u_k$$

En supposant que $\lim_{n\to+\infty} n u_n = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$, montrer que (u_n) converge également.

5. Reprendre la question précédente et démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sigma$ en supposons cette fois-ci que la suite $(|nu_n|)$ est majorée par $M > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$. *Indications* :

   - Si $m < n$ montrer que
   $$u_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n}(u_n - u_i)$$
   - Lorsque $m + 1 \leq i \leq n$, en déduire que
   $$|u_n - u_i| \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$
   - Fixons $\varepsilon > 0$ et pour chaque entier n, choisissons un entier m tel que
   $$m \leq \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < m + 1.$$
   Montrer alors que
   $$\frac{m+1}{n-m} \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad |u_n - u_i| < M\varepsilon$$
   - Conclure en utilisant la limite supérieur de $|u_n - \sigma|$.

3.7 Aspects historiques

Ci-dessous sont exposés quelques éléments historiques (cf. []) A compléter

Dès 1669 Newton s'est intéressé à la convergence de séries infinies dans ses articles *Method of fluxions and infinite series* et *Tractatus de Quadratura Curvarum*.

Au 18^{eme} siècle, certains mathématiciens, Euler par exemple, ne se préoccupaient pas vraiment de la convergence d'une série. A leur yeux, l'important était de pouvoir calculer la série (éventuellement en s'arrêtant à un nombre de termes approprié). A la fin du siècle, Lagrange, dans son ouvrage *Théorie des fonctions analytiques* (1797) pensait que le manque de rigueur dans l'étude des séries numériques avait été un frein pour developper le calcul analytique. Gauss, dans son étude des séries hypergéométriques[11] (1813) étudia pour la première fois les conditions assurant la convergence d'une série.

11. Une série hypergéométrique est la somme d'une suite de termes tels que le quotient du terme d'indice $k + 1$ divisé par le terme d'indice k est une fonction rationnelle de k.