Chapitre 4

Suites récurrentes et point fixes

Dans ce chapitre, nous allons étudier des systèmes dynamiques discrets. L'objectif est de modéliser l'évolution, à temps discret, d'une quantité à l'aide d'une suite définie par récurrence. Nous verrons que le choix de la condition initiale joue un rôle important sur le comportement de la suite (qu'elle converge ou non).

L'étude des suites récurrentes définies par une fonction repose sur des propriétés de monotonie, de continuité et de points fixes. Nous traiterons le cas des fonctions contractantes à la fin du chapitre.

4.1 Continuité d'une fonction

Avant d'étudier les suites récurrentes, nous devons dire quelques mots à propos de la notion de continuité. Celle-ci était définie de manière assez vague au lycée et pouvait se résumer en

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{est continue sur} \quad \mathbb{R} \text{ si son graphe peut se dessiner sans lever le crayon de sa feuille.}$$

Bien qu'imprécise, cette définition indique tout de même que le graphe d'une fonction ne peut comporter de trous ou de sauts. Le lecteur a déjà un catalogue de fonctions continue en tête.

Exemple 4.1.1.

1. Les polynômes sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2. Les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, quotient de deux polynômes, sont continues là où $Q(x) \neq 0$.
3. Les fonctions usuelles $x \mapsto e^x, x \mapsto \ln x, x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto |x|, \ldots$ sont continues sur leur domaine de définition.
4. Les opérations usuelles préservent la continuité : si f et g sont deux fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$ alors
   - $f + g$ est continue sur I,
   - $f \times g$ est continue sur I,
   - $\frac{f}{g}$ est continue sur $I \backslash \{x \in I \,;\, g(x) = 0\}$.
5. La composition de deux fonctions continues est encore une fonction continue : si $f : I \to J$ (avec I et J des sous-ensembles de $\mathbb{R}$) et $g : J \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues alors $g \circ f$ est une fonction continue sur I.

Il est temps de donner la définition formelle de la continuité [1] d'une fonction.

Définition 4.1.1. *1. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ [2]. Nous dirons que f est continue en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

2. Nous dirons que f est continue sur I si f est continue en tout point $x_0 \in I$. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera noté $C^0(I, \mathbb{R})$.

Remarque. Cette définition signifie que lorsque x est proche de x_0 (à η près [3]) alors les valeurs de $f(x)$ sont proches de $f(x_0)$ (à ε près). Ceci quantifie bien l'intuition développée au lycée avec l'aspect graphique (la courbe n'a pas de « trous »).

Exemple 4.1.2. La fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$ n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $h > 0$, nous avons

$$|f(0 + h) - f(0 - h)| = 2 > 0.$$

Cet écart ne pourra jamais être rendu aussi petit que nous souhaitons en rendant h infiniment petit. Le saut de la fonction en 0 est à l'origine de cette discontinuité. [4]

Cette nouvelle définition peut se caractériser de différentes manières [5]. Nous nous concentrerons sur celle utilisant les suites [6].

Proposition 21 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Les assertions sont alors équivalentes.*

1. *f est continue en x_0.*
2. *Pour toute suite (x_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Démonstration. Nous ne traitons qu'une partie de la démonstration, celle qui sera le plus employée dans ce chapitre. Nous laissons au lecteur le soin de compléter la partie manquante.

Supposons que f est continue en x_0 et considérons (x_n) une suite convergeant vers x_0. Par continuité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x - x_n| < \eta$; en particulier, à partir de ce rang $u_n \in I$. Par suite, nous avons donc, pour tout $n \geq N$,

1. Laquelle peut se généraliser, comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur, dans le cadre beaucoup général des espaces topologiques.

2. Implicitement, nous supposerons (et nous le ferons systématiquement, sans forcément le préciser) que x_0 est adhérent à I : pour tout $\delta > 0$, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I \neq \emptyset$. Le lecteur pourra vérifier que cette formulation coïncide avec la définition 2.4.3 : il est possible de produire une suite d'éléments de I qui converge vers x_0

3. Lequel dépend du choix de ε.

4. Toutefois la fonction est continue à droite et à gauche de 0, nous dirons qu'il s'agit d'un point de discontinuité de première espèce (cf. [**?**]).

5. Par exemple, d'un point de vue topologique, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Ceci sera expliqué plus tardivement dans le cours.

6. Cette caractérisation reste valable lorsque f est une fonction définie entre deux espaces métrique (E, d_1) et (F, d_2).

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. □

Voyons ce qui se produit lorsque nous regardons l'image d'un intervalle par une fonction continue. [7]

Théorème 22 (Valeurs intermédiaires)**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors $f(I) = \{f(x)\,;\, x \in I\}$ est un intervalle.*

Remarque. Le lecteur a souvent employé ce résultat de la manière suivante (pour simplifier les choses, nous supposerons que f est aussi croissante) : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$. Ce résultat était notamment pratique en classe de terminale, lorsque f était strictement monotone, pour obtenir des valeurs approchées (via le théorème de la bijection) d'une solution d'une équation qu'il n'était pas possible de résoudre explicitement.

Le théorème des valeurs intermédiaires 22 peut s'obtenir via la proposition suivante.

Proposition 23 (Bolzano)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < 0 < f(b)$.* [8] *alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. Ce résultat s'obtient aisément à partir du principe de dichotomie. A cet effet, posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et définissons $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Deux cas de figures s'offrent à nous :

$$\text{soit} \quad f(m_0) \geq 0 \quad \text{ou} \quad f(m_0) \leq 0.$$

Dans le premier cas, nous posons $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$; dans le second, nous posons $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$. Il nous reste à répéter ce procédé avec $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Ceci fournit deux suites (a_n) et (b_n) qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

De plus, par construction, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ces deux suites sont alors adjacentes et le théorème 5 nous assure qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c.$$

La fonction f étant continue sur $[a,b]$, nous en déduisons, d'après la proposition 21, que $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$. En outre, grâce en procédé de construction, nous savons également que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n).$$

En passant à la limite, nous en déduisons que $f(c) = 0$. □

7. Le lecteur pourra s'interroger si la réciproque est vérifiée : si l'image d'un intervalle par f est encore un intervalle, est-ce que f est continue ? A cet effet, le lecteur pourra étudier la fonction $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ lorsque $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Le théorème de Darboux répond à cette question (cf. [?]).

8. Le résultat reste valable en supposons que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés : $f(a) \times f(b) < 0$.

Bien que nous n'en aurons pas besoin dans le chapitre actuel, mentionnons tout de même un résultat important concernant les fonctions continues sur un intervalle, dit compact, $[a, b]$ avec $a < b$ des réels.

Théorème 24. *Soit $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ alors il existe $c, d \in [a, b]$ tels que*

$$\sup_{x\in[a;b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(d).$$

Autrement dit, f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Nous allons uniquement montrer que la fonction est majorée et que son supremum est un maximum. Le reste de la démonstration s'obtient aisément en modifiant, *mutatis mutandis*, les arguments que nous allons exposer.

Dans un premier temps, l'objectif est de montrer que la fonction est majorée. Ceci nous assurera que le supremum existe. Dans un second temps, nous montrerons que ce supremum est atteint.

1. Si f n'est pas majorée, cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n) \in [a, b]$ telle que
$$f(x_n) > n.$$
Autrement dit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or, par construction, $x_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass 9 nous assure alors qu'il existe une sous-suite (x_{n_k}) ainsi qu'un nombre $l \in [a, b]$ tels que
$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = l.$$
En conséquence, grâce à la continuité de f sur $[a, b]$ et la proposition 21, nous en déduisons que
$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(l) < +\infty$$
ce qui contredit le fait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, f est bornée sur $[a, b]$ et $s = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ est bien défini.
2. Traitons à présent la deuxième partie du théorème. En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, la définition du supremum nous assure qu'il existe $(x_n) \in [a, b]$ telle que
$$s - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq s.$$
Il est alors évident, par construction, que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = s$. En outre, puisque $x_n \in [a, b]$ pour tout $n \geq 1$, le théorème de Bolzano-Weierstrass 9 nous assure de nouveau alors qu'il existe une sous-suite (x_{n_j}) ainsi qu'un nombre $x^* \in [a, b]$ tels que
$$\lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = x^*.$$
Par continuité de la fonction f, nous avons aussi $\lim_{j\to+\infty} f(x_{n_j}) = f(x^*)$. En outre, puisqu'il s'agit d'une sous-suite d'une suite convergente (la suite $\big(f(x_n)\big)$), les limites doivent coïncider :
$$\lim_{j\to+\infty} f(x_{n_j}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x^*) = s.$$
Le supremum de f sur $[a, b]$ est donc bien atteint en x^*, ce qui achève la démonstration.

□

Remarque. Ce résultat reste vrai dans le cadre beaucoup plus général des espaces topologiques en remplaçant l'ensemble $[a, b]$ par un ensemble compact abstrait. Nous y reviendrons ultérieurement sur ceci dans un chapitre ultérieur. .

4.2 Suites récurrentes

Les préliminaires portant sur la continuité et ses conséquences (d'un point de vue séquentiel ou sur l'image d'un intervalle par une fonction continue) étant fait, nous pouvons débuter notre étude des suites récurrentes.

Notre objectif est de modéliser une évolution à l'aide d'une suite. Il faut donc expliquer comment obtenir le nouvel état d'un système à partir d'une condition initiale.

Exemple 4.2.1.
1. La population de lapins double d'année en année et il y avait 10 lapins en 2020
2. L'arbre grandit de 1 cm par mois et l'arbre mesurait 5 cm en janvier 2020.

Pour modéliser mathématiquement cela, nous avons la sensation qu'il faut avoir à disposition une fonction permettant de passer d'un état à l'autre. Le lecteur se convaincra que dans le premier cas, la fonction $f(x) = 2x$ convient tandis que dans le deuxième cas, il faut choisir $f(x) = x+1$.

Ceci nous pousse à introduire la suite (u_n) correspondant à la population de lapin à l'année $2020 + n$; la suite (v_n) correspondra à la taille (en cm) de l'arbre n-ème mois à partir de janvier 2020. Nous devons à présent expliquer comment calculer les termes des suites (u_n) et (v_n) à partir d'une condition initiale (ici, $u_0 = 10$ et $v_0 = 5$), cela s'effectue grâce à une relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2 \times u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + 5.$$

Remarque.
1. Bien entendu, ces exemples ne sont là que pour illustrer notre propos. Dans la majeur partie des cas, ils ne modélisent pas la réalité.
2. Le lecteur reconnaitra la définition d'une suite géométrique de raison $q = 2$ ainsi qu'une suite arithmétique de raison $r = 1$.

Finalement, de manière générale, nous devons étudier une suite définie par récurrence à l'aide d'une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad x_0 \in I. \tag{4.2.1}$$

En réfléchissant quelques instants, nous constatons qu'il est nécessaire d'avoir une propriété de **stabilité** (de l'intervalle I par la fonction f) pour que la suite soit bien définie.

Exemple 4.2.2. Soit $f(x) = \sqrt{x-4}$ définie sur $I = [4; +\infty[$ et étudions la suite (u_n) définie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ et $u_0 = 20$. Nous constatons que

$$u_1 = \sqrt{16} = 4 \quad ; \quad u_2 = \sqrt{0} = 0$$

et u_3 n'existe pas. Le problème provient du fait que $u_2 \notin I$.

Ceci nous pousse à introduire la notion de stabilité pour éviter ce genre de désagrément.

Définition 4.2.1 (stabilité d'un intervalle)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $I \subset \mathbb{R}$. L'ensemble I est stable par f si*

$$x \in I \Longrightarrow f(x) \in I.$$

Remarque. Si I est stable par f, la suite donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in I$ est alors bien définie.

Durant notre étude, nous serons amener à observer le comportement de la suite (u_n) lorsque $n \to +\infty$. Si jamais la suite (u_n) converge vers un nombre $l \in \mathbb{R}$, la relation 4.2.1 entraine alors, en passant à la limite, que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad l = f(l)$$

à condition que la fonction f soit continue (cf. proposition 21). Ceci met en évidence que l'éventuelle limite de la suite (u_n) doit être un des points fixes de la fonction f.

Définition 4.2.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Nous dirons que l est un point fixe de f si*

$$f(l) = l.$$

Géométriquement, il s'agit de l'abscisse des points d'intersection entre la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ avec la courbe C_f.

Avant de poursuivre notre étude, traitons un exemple qui a déjà été rencontré au lycée.

Exemple 4.2.3 (Suites arithmético-géométrique)**.** Soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

avec $a \neq 1$. Etudions le comportement de cette suite.

1. Il est très simple de vérifier que la suite est bien définie, peu importe le choix de $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Déterminons les éventuelles limites de la suite en identifiant les points fixes de la fonction f. Pour cela, il faut résoudre

$$x = ax + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{b}{1-a}.$$

   Notons $l = \frac{b}{1-a}$ la solution de cette équation.

En général, il n'est pas évident d'obtenir une formule explicite (par opposition à la formule de récurrence) de la suite (u_n). Ici, les choses sont suffisamment simples pour le faire. A cet effet, soustrayons membre à membre les deux égalités

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{et} \quad l = al + b.$$

Ceci fournit,

$$u_{n+1} - l = a(u_n - l).$$

Autrement, dit, la suite $(u_n - l)$ est une suite géométrique de raison a. Nous savons alors (cf. cours de lycée) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - l = a^n(u_0 - l) \quad \iff u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

Il est maintenant beaucoup plus aisé d'étudier le comportement asymptotique[9] de la suite (u_n) :

- si $|a| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$.
- si $a > 1$ et $u_0 > \frac{b}{1-a}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- si $a > 1$ et $u_0 < \frac{b}{1-a}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- si $u_0 = \frac{b}{1-a}$ alors la suite est constante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{b}{1-a}$.
- si $a < -1$, la suite n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$.

Faisons quelques commentaires sur ce que nous venons d'observer au travers cet exemple.

1. Il faut s'assurer que la suite est bien définie, pour cela il convient de **trouver un ensemble stable** par f. Notons au passage qu'il n'est pas impératif que $x_0 \in I$, l'important est qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in I$. A partir de ce rang, la suite ne quittera plus l'ensemble I.
2. Il faut résoudre l'équation $f(x) = x$ afin de **déterminer les points fixes** de la fonction f, seules ces valeurs pourront être des limites de la suite.
3. En général, il n'est pas évident de trouver une formulation explicite de la suite (u_n).[10] En particulier, il faudra trouver des arguments alternatifs permettant d'établir la convergence de la suite (u_n).

Voyons maintenant quelques classes de fonctions permettant de mener à bien notre étude.

4.3 Fonctions croissantes

Dans cette section, nous supposons que f est une **fonction croissante et continue** ; I désignera un ensemble **stable** par f.

Théorème 25. *Soient $f : I \to I$ une fonction croissante et continue, I un ensemble stable par f ainsi que $u_0 \in I$. Sous ces hypothèses la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par*

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

est monotone. En outre, sa monotonie est déterminée par le signe de $f(u_0) - u_0$. Plus précisément,

- *si $f(u_0) > u_0$ alors la suite (u_n) est croissante.*

9. i.e. lorsque $n \to +\infty$.

10. Une formule explicite impliquera f et ses itérées : puisque $u_1 = f(u_0)$ alors $u_2 = f \circ f(u_0) = f^{(2)}(u_0)$ d'où, par récurrence immédiate $u_n = f^{(n)}(x_0)$. Si la fonction f est complexe, il est difficile de déterminer $f^{(n)}$; attention d'ailleurs à ne pas confondre $f^n(x) = \big[f(x)\big]^n$ et $f^{(n)}(x) = f \circ \cdots \circ f(x)$; idem avec la dérivée n-ième de f, le contexte fera qu'il n'y aura aucune ambiguïté.

- *si* $f(u_0) < u_0$ *alors la suite* (u_n) *est décroissante.*
- *si* $f(u_0) = u_0$ *alors la suite* (u_n) *est constante, égale à* u_0*.*

Enfin, si la suite (u_n) *converge alors sa limite* l *est un point fixe de* f*.*

Remarque. A noter qu'il faut justifier que la suite (u_n) converge. Une fois ce fait établi, la limite est nécessairement l'un des points fixes de f. Notons que le théorème établi le fait suivant : pour connaitre la monotonie de la suite il suffit de comparer u_0 avec u_1, l'ordre obtenu se transmettra aux autres termes de la suite.

Démonstration. Pour établir notre résultat, il suffit d'étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Une récurrence immédiate montre que ce signe est le même que celui de $f(u_0) - u_0$. Les différents cas de figures énoncés dans la proposition permettent ensuite de conclure.

Si la suite (u_n) converge vers une limite l, nous pouvons passer à la limite (grâce à la continuité de f) dans la relation

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Ce qui nous assure que $l = f(l)$, autrement dit l est un point fixe de la fonction f. □

Maintenant que nous avons un moyen simple (une étude de signe) d'établir la monotonie de la suite (u_n), il est naturel de songer au théorème 4 pour déterminer le comportement de la suite. Nous verrons dans un exemple ainsi que dans les exercices du chapitre que la forme de l'ensemble stable I permettra simplement de conclure. Par exemple, lorsque $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, nous obtiendrons une suite monotone et bornée : la suite sera donc convergente. En revanche, lorsque $I = [a, +\infty[$ (par exemple) nous verrons que le choix de u_0 pourra entrainer la convergence ou la divergence de la suite.

Exemple 4.3.1. Soit $f(x) = \frac{x^2+2}{3}$ et considérons la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

et x_0 un nombre réel donné. Mettons en oeuvre l'étude d'une suite récurrente.

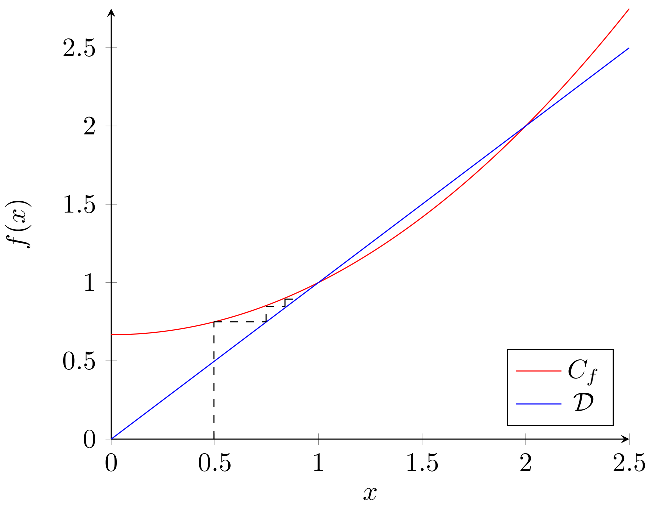
1. Une simple étude des variations de f permet de montrer que l'intervalle $I = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ est stable par f. De plus f est croissante sur cet intervalle.
2. Etudions à présent le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in I$. Grâce au discriminant, nous constatons que la fonction admet deux racines :

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 2.$$

   Notons en passant que ces deux valeurs correspondent aux points fixes de la fonction f. De plus, nous savons également que

   - $f(x) - x > 0$ lorsque $x \in \left[\frac{2}{3}; 1[\cup]2, +\infty\right[$. En conséquence, si $x_0 \in \left[\frac{2}{3}; 1[\cup]2, +\infty\right[$ la suite (u_n) est croissante.
   - $f(x) - x < 0$ lorsque $x \in]1, 2[$. En conséquence, si $x_0 \in]1, 2[$ la suite (u_n) est décroissante.

Avant de poursuivre notre étude quant au comportement asymptotique de la suite (u_n), voyons quelles informations peuvent être obtenues en observant le graphe C_f de la fonction f avec celui de la première bissectrice $\mathcal{D}$ (la droite d'équation $y = x$).



Sur la figure, nous avons dessiné ce qui se produit si $x_0 = 0.5$. Tout d'abord, nous trouvons sur image sur la courbe C_f. Nous reportons celle-ci sur la droite $\mathcal{D}$ et recommençons. Il semblerait que la suite converge vers la valeur 1. Si jamais nous avions choisi $x_0 = 2.3$, nous aurions constaté que la suite s'échappe vers $+\infty$ au fur et à mesure des itérations. Dans ces deux cas, la suite (u_n) est croissante, si $x_0 = 1.5$, nous observons que la suite est décroissante et semble converger vers la valeur 1 [11] Nous pouvons à présent nous attacher à démontrer ces observations.

Rappelons que, d'après le théorème 25, la limite éventuelle de la suite (u_n) est α_1 ou α_2 (les points fixes de la fonction f). Voyons, suivant la valeur de u_0, les cas de figures qui s'offrent à nous :

- Si $x_0 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right[$ alors la suite (u_n) est croissante d'après ce qui précède. De plus, une récurrence immédiate (utilisant le fait que f est croissante et $f(1) = 1$), montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leq 1.$$
Autrement dit, la suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge (cf. théorème 4) donc vers sa borne supérieure $\alpha_1 = 1$.
- Si $x_0 \in]1, 2[$ alors la suite (u_n) est décroissante d'après ce qui précède. De plus, une récurrence immédiate (utilisant le fait que f est croissante et $f(1) = 1$), montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \geq 1.$$

11. Il est assez curieux de constater que si $x_0 = 2,00000001$ la suite diverge alors que si $x_0 = 1,9999999999$ alors la suite converge bien que l'écart entre les deux conditions initiales est très faible ; ceci peut s'apparenter à la notion de chaos : un changement minimum des conditions initiales entraine un changement drastique du comportement asymptotique.

Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante et minorée : elle converge (cf. théorème 4) donc vers sa borne inférieure $\alpha_1 = 1$.

- Si $x_0 \in]2;+\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante d'après ce qui précède. Supposons que la suite soit majorée et notons B le plus petit des majorants. Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 < u_n \leq B.$$

En outre, d'après le théorème 4, nous savons $\lim_{n\to+\infty} u_n = B$. Or $B > \alpha_2 > \alpha_1$, ce qui est absurde puisque la suite doit nécessairement converger vers l'un de ses points fixes. La suite (u_n) n'est donc pas majorée d'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Nous verrons en exercice ce qui se produit lorsque la fonction f est supposée décroissante. Dans ce cas de figure, la situation sera légèrement plus élaborée que ce que nous venons de présenter.

Nous avons déjà rencontré une méthode (cf. principe de dichotomie dans l'exemple 2.4.3 permettant d'approcher $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels. Ci-dessous, nous allons présenter un autre algorithme, plus rapide. Le principe général sur lequel repose l'exemple suivant s'appelle la *méthode de Newton* et utilise la notion de dérivée, nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

Exemple 4.3.2 (Méthode de Héron)**.** A nouveau, l'idée est d'utiliser le fait que $\sqrt{2}$ annule la fonction $F(x) = x^2 - 2$. Afin de produire une suite récurrente, il faut tout d'abord trouver un moyen d'exhiber une fonction possédant $\sqrt{2}$ comme point fixe. A cet effet, il suffit d'observer que

$$x^2 - 2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 = 2 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{2}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad 2x = x + \frac{2}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

à condition que $x \neq 0$. Ce jeu d'écriture montre que $\sqrt{2}$ est un point fixe de la fonction $F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. Nous pouvons alors définir la suite (u_n) par

$$u_{n+1} = F(u_n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

avec u_0 une valeur donnée. Nous pouvons alors mettre en oeuvre l'étude de cette suite :

1. Il est rapide de vérifier que l'intervalle $I = [\sqrt{2};+\infty[$ est stable par F. De plus, F est croissante sur I. Ainsi, la suite (u_n) est bien définie dès lors que $u_0 \in I$ [12] Posons alors $u_0 = 2$.
2. En reprenant ce qui a été présenté au début de l'exemple, nous observons que les seuls points fixes de F sont $\pm\sqrt{2}$.
3. Il nous reste à établir la convergence de la suite (u_n). Pour cela nous allons montrer que la suite est décroissante et minorée. En effet, lorsque $x \in I$, le signe de $F(x) - x$ est celui de $2 - x^2$ et cette quantité est négative dès que $x \geq \sqrt{2}$. Ainsi, puisque $u_0 = \sqrt{2}$, nous avons

$$u_1 - u_0 = F(u_0) - u_0 \leq 0.$$

12. Il serait possible de choisir u_0 autrement. L'important est qu'à partir d'un certain rang n_0, $u_{n_0} \in I$. Dans ce cas, $u_n \in I$ pour tout $n \geq n_0$.

Le théorème 25 nous assure alors que la suite (u_n) est bien décroissante. Il est ensuite élémentaire de démontrer par récurrence que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Au vu de ce qui précède, le théorème 25 nous permet alors de conclure

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}.$$

4. Précisons le résultat précédent en estimant la vitesse de convergence. Pour cela, il suffit de majorer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \sqrt{2}.$$

A cet effet, pour tout $x \geq \sqrt{2}$, observons que

$$0 \leq F(x) - \sqrt{2} = \frac{1}{2x}(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) = \frac{1}{2x}(x - \sqrt{2})^2 \leq \frac{1}{2}(x - \sqrt{2})^2$$

puisque $x \geq \sqrt{2} \geq 1$. D'où, en substituant x par u_n dans l'inégalité précédente nous obtenons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2. \tag{4.3.1}$$

Démontrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{2} \leq 2^{1-2^n}$. C'est évident si $n = 0$ puisque $u_0 - \sqrt{2} < 1$. Si l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang n, alors d'après (4.3.1), nous avons

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2 \leq \frac{1}{2}2^{2(1-2^n)} = 2^{1-2^{n+1}}$$

ce qui conclut le raisonnement par récurrence. A titre de comparaison, après n étapes, le principe de dichotomie donnait une erreur de l'ordre de 2^{-n} tandis que la méthode de Héron fournit une erreur de l'ordre de 2^{-2^n}. Pour illustrer ceci, notons qu'en 4 étapes, la méthode du Héron fournit écriture décimale approchée de $\sqrt{2}$ avec 9 décimales exactes tandis qu'avec le procédé de dichotomie, il nous avait fallu 10 étapes pour obtenir seulement 3 décimales.

La différence entre ses deux méthodes repose sur l'utilisation implicite de la convexité de la fonction F, tandis que le principe de dichotomie n'utilisait qu'une hypothèse de continuité [13].

Bien que relativement simple à présenter, les exemples précédents montrent que l'étude des suites récurrentes propose des situations relativement riches. Cette complexité peut se trouver exacerbée sur certain exemple.

Exemple 4.3.3 (Suite logistique (modèle discret de Verhulst)**.** Nous allons présenter un exemple modélisation de population. Nous noterons par (u_n) le ratio entre une population existante et sa capacité maximale [14] à un instant n. Cette suite est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = \mu \times u_n(1 - u_n)$$

13. La propriété de convexité est plus forte : une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite. En particulier, elle est continue.

14. En présupposant qu'en raison d'un nombre de ressources limitées et de place, une population ne peut croitre indéfiniment dans un milieu donné.

où $\mu \in [0,4]$ est un paramètre donné [15] et avec $u_0 \in [0,1]$ correspondant à la population initiale. Ce modèle capture deux phénomènes intéressants :

- celui de reproduction : la population grandit proportionnellement à sa taille lorsque la population est petite (i.e u_n est proche de zéro).
- celui de « famine » : la population diminue lorsque sa taille est trop élevée (i. e. u_n est proche de 1), les ressources à disposition n'étant plus suffisantes pour nourrir tout le monde.

Il se trouve que le choix du paramètre μ aura des conséquences importantes sur le comportement asymptotique de la suite :

- si $0 < \mu < 1$ la population s'éteint indépendamment du choix de la population initiale. Lorsque $\mu = 0$, la suite est identiquement nulle.
- si $1 < \mu < 2$ la population atteint rapidement sa capacité maximale $\frac{\mu-1}{\mu}$ indépendamment du choix de la population initiale. Le même comportement se produit, avec des fluctuations autour de la valeur limite et une vitesse plus lente lorsque $2 < \mu < 3$.
- si $3 < \mu < 1+\sqrt{6}$ la population oscille entre plusieurs valeurs.
- ...
- si $\mu \approx 3.569\ldots$ la suite devient chaotique.

Tout ceci dépasse largement ce que nous souhaitons exposé et nous renvoyons le lecteur curieux vers le cours de D. Perrin [?] qui propose une étude détaillée de cette suite. Signalons au passage, le lien suivant

https://lgarcin.github.io/2016-12-14-suite-logistique/

qui permet de visualiser ce que nous avons décris en quelques mots ; il est également possible de consulter le diagramme de bifurcation (lequel décrit les valeurs asymptotiquement visitées ou approchées par la suite)

https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map#/media/File:Logistic_Bifurcation_map_High_Resolutio

Aussi intéressante que puisse être la complexité du l'exemple précédent, il serait intéressant d'avoir une classe de fonctions pour lesquelles ce phénomène chaotique ne puisse se produire (i.e. pour lesquelles la convergence est assurée). C'est l'objet de la section suivante.

4.4 Fonctions contractantes

Dans la section précédente, nous avons vu que l'étude du comportement asymptotique d'une suite (u_n), définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ une condition initiale donnée, reposait sur plusieurs points :

- Un intervalle stable sur lequel la fonction f est croissante

15. Le choix $\mu \in [0;4]$ est la pour assurer que l'intervalle $I = [0,1]$ est bien stable et que la suite (u_n) est bien définie.

- Des arguments de monotonie permettant de justifier la convergence ou non de la suite (u_n).

Il est naturel de s'interroger : est-il possible d'exhiber une classe suffisamment riche de fonctions nous permettant d'éviter la vérification du deuxième point évoqué ci-dessus ? Est-il possible de s'affranchir de l'hypothèse « f est une fonction croissante » sans complexifier l'étude ?

Imaginons un instant que nous ayons à disposition une fonction f, un intervalle stable I ainsi qu'un point fixe l. Supposons que la fonction f réduise les distances au sens-suivant : il existe un nombre $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - l| \leq k|x - l|. \tag{4.4.1}$$

Voyons ce que nous permet de dire l'équation 4.4.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$|u_{n+1} - l| = \big|f(u_n) - l\big| \leq |u_n - l|.$$

Autrement dit, à chaque itération, la suite se rapproche de plus en plus du point fixe l. C'est pourquoi, à l'aide d'une récurrence immédiate, nous en déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, nous en déduisons que

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0 \quad \iff \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

puisque $0 < k < 1$. Malheureusement, en pratique, il n'est pas évident d'établir une relation comme celle présentée dans (4.4.1). Cependant, en suivant le principe décrit ci-dessous, il est possible d'obtenir une classe de fonctions permettant d'aboutir à la même conclusion.

Définition 4.4.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nous dirons que f est une fonction contractante (de rapport k) s'il existe $k \in]0;1[$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq k|x - y|. \tag{4.4.2}$$

Remarque. L'ensemble des fonctions vérifiant (4.4.2) avec $k > 0$ (au lieu de la restriction $0 < k < 1$) est une fonction dite lipschitzienne ; k désigne alors la constante de Lipschitz associée.

Nous pouvons à présent énoncer à un résultat concernant le comportement asymptotique d'une suite récurrente définie à l'aide d'une fonction contractante.

Théorème 26 (Point fixe)**.** *Soit $f : I \to I$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un ensemble fermé*[16] *stable par f. Définissons, pour tout $u_0 \in I$, la suite (u_n) par*

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si f est une fonction contractante alors il existe $l \in I$ tel que $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. De plus, l est l'unique point fixe de f.

16. Un ensemble I est dit fermé si pour toute suite convergente de I sa limite reste dans I. Autrement dit, considérons (x_n) est une suite d'élément de I qui converge vers $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in I$ alors I est un ensemble fermé

Remarque. En supposant que f est contractante, nous avons imposé plus que l'hypothèse de continuité mais nous avons aucune restriction vis-à-vis de sa monotonie. L'existence de la limite l est un point important du théorème (contrairement au théorème 25 dans lequel il fallait établir la convergence de la suite). En pratique, lorsque la fonction f est dérivable sur I, nous avons l'équivalence suivante : pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| \leq k < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{est contractante.} \tag{4.4.3}$$

Nous reviendrons sur ce point lorsque nous présenterons le théorème des accroissements finis.

Démonstration. 1. (Unicité) Par l'absurde, supposons que l et l' soient deux point fixes distincts de f. Ainsi, en utilisant le fait que f est une application contractante, nous avons

$$|l - l'| = \left|f(l) - f(l')\right| \leq k|l - l'| < |l - l'|$$

puisque $0 < k < 1$. Ceci est absurde donc $l = l'$.

2. (Existence) L'objectif est de montrer que, sous les hypothèses du théorème, la suite (u_n) est de Cauchy. En conséquence, grâce au théorème 10 nous saurons qu'il existe une limite $l \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. En outre, puisque I est fermé et que (u_n) est une suite de I nous savons que $l \in I$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse portant sur f, nous assure que

   $$|u_{n+1} - u_n| = \left|f(u_n) - f(u_{n-1})\right| \leq k|u_n - u_{n-1}|.$$

   D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

   $$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|. \tag{4.4.4}$$

   Cette majoration va nous permettre de montrer que la suite (u_n) est de Cauchy. A cet effet, soient $m, n \in \mathbb{N}$, nous avons alors (via l'inégalité triangulaire),

   $$|u_{n+m} - u_n| \leq |u_{n+m} - u_{n+m-1}| + \ldots |u_{n+1} - u_n| \leq k^{n+m-1}|u_1 - u_0| + \ldots + k^n|u_1 - u_0|$$

   grâce à l'inégalité 4.4.4. Nous avons donc établi que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

   $$|u_{n+m} - u_n| \leq k^n(1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-1})|u_1 - u_0|.$$

   Or, comme cela a été vu dans la proposition 14, nous savons que

   $$1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-1} = \frac{1 - k^m}{1 - k} \leq \frac{1}{1 - k}.$$

   En conséquence,

   $$|u_{n+m} - u_n| \leq \frac{k^n}{1 - k}|u_1 - u_0|. \tag{4.4.5}$$

   Puisque $0 < k < 1$, le membre de droite de cette dernière égalité converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Cela démontre que la suite (u_n) est de Cauchy et, suivant l'argumentaire présenté en début de preuve, cela conclu notre démonstration.

□

Remarque. La démonstration est très instructive pour plusieurs raisons que nous décrivons ci-dessous.

1. En faisant tendre $m \to +\infty$ dans (4.4.5), nous obtenons une vitesse de convergence (exprimée en fonction de k et de l'écart entre u_1 et u_0) de la suite vers sa limite l :
$$|l - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|.$$
La convergence est donc exponentiellement rapide.
2. Finalement, en y réfléchissant, l'argument essentiel est d'obtenir une suite de Cauchy. Cela signifie que le théorème 26 sera valable dans le cadre beaucoup plus général des espaces métriques complet (E, d) (lesquels peuvent se voir comme une généralisation de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$).
3. Nous verrons en application que le théorème 26 permet d'obtenir simplement un résultat d'existence et d'unicité pour des problèmes d'équations différentielles avec conditions initiales.

Exemple 4.4.1. Sans procéder à l'étude complète, présentons un exemple que nous n'aurions pas pu traiter avec les arguments de la section 4.3. Considérons la fonction $f(x) = \frac{x+\sin(x)}{3}$ et définissons la suite (u_n) par
$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$
avec u_0 une valeur donnée. L'expression de la fonction f rend délicat la recherche de ses points fixes. Cependant, il est très simple de montrer, via l'affirmation (4.4.3), qu'il s'agit d'une application contractante avec $k = \frac{2}{3}$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$|f'(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

Pour conclure, voyons comment le théorème 26 nous permet de proposer un autre algorithme, permettant d'approcher $\sqrt{2}$.

Exemple 4.4.2. Considérons la fonction $f(x) = x^2 - 2$ avec $x \in [1, 2] = I$. Nous cherchons à mettre en place un algorithme permettant d'approcher le zéro (appartenant à l'intervalle I) de la fonction f. Observons que $0 < 2 \leq f'(x) \leq 4$ sur I (i.e. f est strictement croissante sur I) et que $f(1) < 0$ tandis que $f(2) < 0$.

Posons alors $\phi(x) = x - Cf(x)$ avec C une constante à choisir. Notons que résoudre $f(x) = 0$ sur I est équivalent à déterminer les points fixes de ϕ sur I. Choisissons maintenant C de sorte que ϕ soit un application contractante. A cet effet, observons que
$$1 - 4C \leq \phi'(x) \leq 1 - 2C \quad \text{pour tout} \quad x \in I.$$
Le choix $C = \frac{1}{4}$ entraine que $|\phi'(x)| < 1$ pour tout $x \in I$. D'après (4.4.3), ϕ est alors contractante sur I. De plus, ϕ étant croissante sur I, nous avons $\phi(1) = \frac{5}{4} > 1$ et $\phi(2) = \frac{1}{2} < 2$ d'où
$$\phi(I) \subset I.$$
I étant un intervalle fermé, nous pouvons appliquer le théorème 26 qui nous assure que la suite définie par
$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0 \quad \text{avec} \quad x_0 \in I$$
converge vers $\sqrt{2}$. Nous savons aussi que la convergence de l'algorithme est exponentiellement rapide.

Remarque. 1. Nous dirons parfois que la convergence est linéaire, dans le sens où le nombre de décimales exactes (vis-à-vis de la limite cherchée) de x_n croît au moins linéairement avec p.

2. Lorsque nous aurons à disposition les développements limités, nous verrons qu'une étude plus fine du comportement de ϕ au voisinage de son point fixe permet de préciser la vitesse de convergence de la suite (x_n).
3. En y réfléchissant, le raisonnement précédent se généralise aisément afin de résoudre $f(x) = 0$ lorsque f est une fonction dérivable sur $I = [a, b]$ telle que f soit croissante, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ [17] et $0 < m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.

Alors que notre chapitre s'achève, il est naturel de s'interroger quant aux questions laissées en suspens. Nous avons vu que l'utilisation de la dérivée permet de montrer que f est contractante. Des informations supplémentaires sur la régularité (l'utilisation de la dérivée seconde par exemple) permettent-ils d'en dire plus ? Cela permet-il de mettre en place des algorithmes plus performants ?

4.5 Notes historiques

A compléter

4.6 Exercices

Exercice 4.1. Soient $a < b$ des réels. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 4.2. Considèrons la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + nu_n^2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

1. Montrez que la suite est de signe constant.
2. Supposons que $u_0 > 0$. Montrez que la suite (u_n) est monotone et qu'elle converge vers une limite à déterminer.

Exercice 4.3. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1 \leq u_n < u_{n+1} < u_n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

   En déduire que pour entier tout $n \geq 1$, $u_n < 2$.
2. A l'aide de ce qui précède, montrer que la suite (u_n) converge et encadrer sa limite.

17. le cas contraire s'obtient de la même manière en considérant $-f$.

3. Pour tout $n \geq 0$, soit $v_n = u_n^2$. Calculer explicitement, en fonction de n, v_n et en déduire la limite de (u_n) lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.4. Soit $a \geq 0$ un nombre réel fixé.

1. Démontrer que la suite de nombres réels positifs (u_n) obtenue via la formule de récurrence suivante
$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} + 1 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0$$
est bien définie.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite l.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que
$$|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{1+l}|u_n - l|.$$
En déduire une majoration de $|u_{n+1} - l|$ en fonction de n et de a.

Exercice 4.5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x) = 2 + \sqrt{x}$. Considérons $a \geq 0$ ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et
$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) \geq x$.
2. Tracer le graphe de la fonction f. Représenter sur le graphe les valeurs de la suite pour $a = 1$ et $a = 9$.
3. Montrer que (u_n) est une suite monotone. Préciser son sens de variation en fonction de a.
4. Montrer que la suite converge vers une limite l à préciser.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $|u_{n+1} - l| \leq \frac{|u_n - l|}{2}$ et en déduire une majoration explicite, en fonction de n, de $|u_n - l|$.

Exercice 4.6 (Modèle de population discret de Verhulst). Soit $\mu \in [0, 4]$ un paramètre. Dans cet exercice nous nous proposons d'étudier la suite logistique (u_n) introduite dans l'exemple **??**. Rappelons que celle-ci est définie par la relation de récurrence
$$u_{n+1} = \mu \times u_n(1 - u_n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

1. Montrer que si $u_0 \in [0, 1]$ alors, pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [0, 1]$. Par la suite, nous supposerons toujours que $u_0 \in [0, 1]$.
2. Montrer que si $\mu \in [0, 1]$ alors la suite converge vers 0 en décroissant.
3. Montrer que si $\mu \in]1, 2[$ alors la suite converge vers $\frac{\mu-1}{\mu}$.

Remarque. A nouveau, le lecteur pourra satisfaire sa curiosité (concernant le cas de figure $\mu > 2$ en étudiant le cours de [**?**]).

Exercice 4.7. Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre réel tel que $a > 4$.

1. Démontrer qu'on peut définir une suite (x_n) par récurrence en posant $x_0 = a$ et
$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n - 4} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$
Que se passe-t-il si $a \leq 4$?
2. Démontrer que l'application $x \mapsto \frac{x-6}{x-4}$ possède deux points fixes α, β (avec $\alpha < \beta$) que l'on déterminera.
3. Supposons que $a \notin \{\alpha, \beta\}$ et définissons :
$$y_n = \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$
Pour tout $n \geq 0$, calculer y_{n+1} en fonction de y_n et en déduire la limite de (x_n) lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.8. La suite de Fibonacci est définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1, u_1 = 1$ et la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0. \tag{4.6.1}$$
L'objet de cet exercice est d'établir une formule explicite donnant un directement u_n en fonction de n.

1. Soit $q \in \mathbb{R}_*$. Démontrer que la suite géométrique (q^n) vérifie (4.6.1) si et seulement si le nombre q satisfait l'équation
$$q^2 - q - 1 = 0.$$
2. Trouver les deux valeurs q_1 et q_2 solution de l'équation précédente.
3. Trouver deux constantes numériques α, β telles que la suite de Fibonacci s'écrive :
$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$
4. En déduire la formule suivante :
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) quad\text{pour tout} \quad n \geq 0.$$
5. Etudier la convergence de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque $n \to +\infty$. *Indication : montrer que la suite de Fibonacci est une suite strictement croissante d'entiers naturels.*

Exercice 4.9. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + n^2}{n^2 + 1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0$$
avec $u_0 \in \mathbb{R}$ une valeur donnée

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, sa limite est nécessairement égale à 1.
2. Démontrer que si $u_0 = 1$, la suite (u_n) est constante.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n^2 - n^2)}{n^2 + 1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$
4. Supposons que $0 \leq u_0 < 1$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$ et en déduire que la suite (u_n) converge.
5. Supposons qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $1 < u_p \leq p^2$. Démontrer alors que pour tout $n \geq p$, nous avons
$$1 < u_{n+1} \leq u_n.$$
En déduire que la suite (u_n) converge.
6. Supposons que $1 < u_0 < \sqrt[4]{7}$. Démontrer que $1 < u_2 \leq 4$ puis que la suite (u_n) converge.
7. On suppose que $u_0 \geq 2\sqrt{2}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, $u_n \geq 8n^2$. En déduire la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.10. Soient $a, b > 0$ deux nombres réels positifs. Définissons par récurrence deux suites (u_n) et (v_n)en posant $u_0 = a, v_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$:
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
Le nombre réel u_{n+1} est appelé la moyenne géométrique des nombres réels u_n et v_n tandis que le nombre réel v_{n+1} est leur moyenne arithmétique.

1. Calculer u_1 et v_1 puis comparer les.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$:
$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$
3. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent, puis que leurs limites sont égales.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes et que leur limite commune l vérifie :
$$\sqrt{a \times b} \leq l \leq \frac{a + b}{2}.$$
Le nombre réel l est appelé la moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Exercice 4.11. Soient $a, b > 0$ deux nombres réels positifs tels que $a < b$. Définissons par récurrence deux suites (x_n) et (y_n) en posant $x_0 = a, y_0 = b$ et pour tout $n \geq 0$:
$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}\right) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$
Le nombre réel x_{n+1} est appelé la moyenne harmonique de x_n et y_n

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{(x_n + y_n)}.$$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 < y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(x_n - y_n)$$
3. Démontrer que la suite (x_n) est croissante et que la suite (y_n) est décroissante.
4. Démontrer que les deux suites (x_n) et (y_n) sont convergentes et ont la même limite.
5. Démontrer que la suite $(x_n \times y_n)$ est constante. En déduire la limite des suites (x_n) et (y_n) lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.12. Soit $\alpha > 1$ et posons $x_1 > \sqrt{\alpha}$ ainsi que
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge vers $\sqrt{\alpha}$.
2. Posons $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\varepsilon_{n+1} = \frac{(\varepsilon_n)^2}{2x_n} < \frac{(\varepsilon_n^2)}{2\sqrt{\alpha}}.$$
3. Si $\beta = 2\sqrt{\alpha}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\varepsilon_{n+1} < \beta\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{2^n}.$$
4. Montrer que si $\alpha = 3, x_1 = 2$, alors $\frac{\varepsilon_1}{\beta} < \frac{1}{10}$ et
$$\varepsilon_5 < 4 \times 10^{-16} \quad ; \quad \varepsilon_6 < 4 \times 10^{-32}$$
5. Reprendre l'exercice en remplaçant la formule de récurrence par
$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p}x_n + \frac{\alpha}{p}(x_n)^{1-p} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$
avec $p \in \mathbb{N}_*$.

Exercice 4.13. Soit $\alpha > 0$ et posons $x_1 > \sqrt{\alpha}$ ainsi que
$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - (x_n)^2}{1 + x_n} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la sous-suite (x_{2k+1}) des termes d'indices impairs est décroissante.
2. Montrer que la sous-suite (x_{2k}) des termes d'indices pairs est croissante.
3. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.
4. Estimer la vitesse de convergence en étudiant la suite $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$. Comparer avec l'exercice précédent.