# Chapitre 5

# Dérivation

Ce chapitre a pour objectif de s'intéresser au comportement local d'une fonction. Pour cela, nous mettrons en évidence l'utilité des développements limités (via les formules de Taylor par exemple). En effet ces derniers permettent d'approcher localement une fonction donnée par un polynôme (sous réserve d'une certaine régularité de la fonction), ce procédé permet de nombreuses applications : déterminer des limites élaborées, étude des extremums et des variations d'une fonction, étude de la convergence d'algorithme.

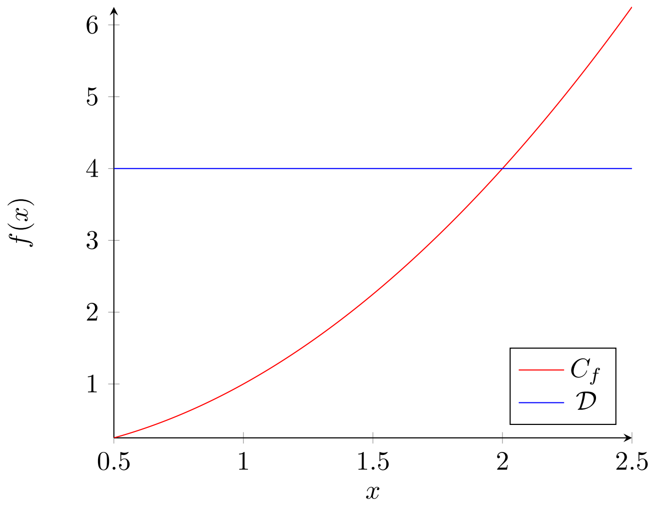
## 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes régulièrement demandés comment approcher différente quantités à l'aide des outils de l'analyse (via des suites par exemple). A un moment donné, nous avons rapidement présenté la notion de continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En réfléchissant quelques instants, nous voyons que la définition 4.1.1 peut être un moyen alternatif pour approcher les valeurs d'une fonction. Pour le confort du lecteur, rappelons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, est continue en $x_0 \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Autrement dit, lorsque $x$ est proche de $x_0$, $f(x)$ est proche de $f(x_0)$. Voyons ce qui se produit sur un exemple très simple.

**Exemple 5.1.1.** La fonction $f(x) = x^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Puisque 2.01 est proche de 2, nous en déduisons alors que $f(2.01)$ doit être proche de $f(2) = 4$. Le problème est que cela semble très imprécis et que la définition 4.1.1 ne nous permet pas d'en dire beaucoup plus (la dépendance de $\eta$ en fonction de $\varepsilon$ n'est pas explicite) . Finalement, c'est comme si, au voisinage de 2, nous cherchions à approcher la courbe $C_f$ par la droite d'équation $y = 4$. Nous avons rapidement l'intuition que cette droite ne suit pas vraiment la même trajectoire que $C_f$ et que les informations qu'elle apporte sont assez limitées.




Néanmoins, en faisant appel à nos souvenirs du lycée, nous savons que la fonction $x \mapsto x^2$ est plus régulière qu'une fonction continue : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Passons en revue les arguments employés pour démontrer ceci. Dans ce qui suit nous supposerons que $h$ est un nombre réel très proche de 0. Nous avons alors

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0 h + h^2 \quad \text{pour tout} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

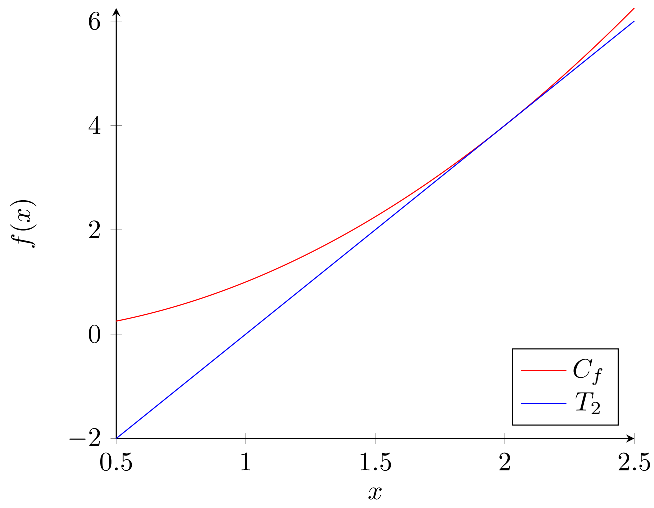
En particulier, pour $x_0 = 2$, nous avons

$$(2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$$

Ceci peut se lire de la manière suivante : dès lors que nous nous plaçons à proximité de 2 (i.e. en choisissant $h$ petit), la fonction $h \mapsto (2 + h)^2$ se comporte comme la fonction affine $h \mapsto 4 + 4h$ et l'erreur d'approximation commise se mesure en fonction de $h$. Ainsi, si $h = 0.1$ nous avons

$$2.01^2 = 4.41 \quad \text{tandis que} \quad 4 + 4 \times 0.1 = 4.4$$

l'erreur d'approximation est alors de $h^2 = 0.01$. D'un point de vue plus géométrique, en posant $x = 2 + h$ et en oubliant l'erreur d'approximation, nous voyons qu'il semble pertinent d'approcher (au voisinage de 2) la trajectoire de la parabole $C_f$ par la celle de la droite $T_2$ d'équation $y = 4x - 4$.




L'exemple précédent met en évidence une idée essentielle de l'analyse : si $f$ est régulière alors, localement [1],

**la fonction se comporte comme une fonction affine.** [2]

Cette idée intervient à d'innombrables moments dans de nombreux domaines des mathématiques. Nous allons voir plus précisément comment l'exploiter et, en particulier, comment cette idée permet de comprendre les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée. Avant cela, il va être nécessaire d'introduire des notations afin d'avoir un moyen pratique et manipulable de quantifier les erreurs commises lorsque nous ferons des approximations.

## 5.2 Notations

Par la suite, étant donné $x_0 \in \mathbb{R}$, nous noterons $\mathcal{V}(x_0) = ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$ tout voisinage ouvert de $x_0$.

**Définition 5.2.1** (Notations de Laudau)**.** *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous dirons que*

- *$f$ est **dominée** par $g$ au voisinage de $x_0$ s'il existe $C > 0$ et $\mathcal{V}(x_0)$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V}(x_0)$*

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

*Nous noterons ceci $f = O_{x_0}(g)$.*

- *$f$ est **négligeable** devant $g$ au voisinage de $x_0$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{V}(x_0)$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V}(x_0)$*

$$|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

*Nous noterons ceci $f = o_{x_0}(g)$.*

1. La figure précédente montre que cette approximation devient inutile si nous nous éloignons de 2.
2. Modulo l'erreur d'approximation

- *$f$ est **équivalente** à $g$ au voisinage de $x_0$ si*
$$f - g = o_{x_0}(g).$$
*Nous noterons ceci $f \sim_{x_0} g$.*

*Remarque.* Il faut faire attention au sens de ces notations qui peuvent parfois induire en erreur. En effet, la notation $f = O(g)$ n'est pas véritablement une égalité. D'ailleurs, il existe de nombreuses propriétés vérifiées par ces relations et celles-ci montrent qu'il faut être prudent des abus de notations que cela engendre. Par exemple,
$$\text{si} \quad f_1 = O_{x_0}(g) \quad \text{et} \quad f_2 = O_{x_0}(g) \quad \text{alors} \quad f_1 + f_2 = O_{x_0}(g).$$ [3]
Des propriétés similaires sont vérifiées pour la relation induite par la notion de *négligeabillité* (les « petits o »). En revanche, il n'est pas possible de faire la même chose pour la relation d'équivalence :
$$x + 1 \sim_{+\infty} x + 2 \quad \text{et} \quad -x \sim_{+\infty} -x \quad \text{mais} \quad 1 \not\sim_{+\infty} 2.$$
En revanche, la relation d'équivalence se comporte à merveille vis-à-vis des produits (ou des quotients) :
$$\text{si} \quad f_1 \sim_{x_0} f_2 \quad \text{et} \quad g_1 \sim_{x_0} g_2 \quad \text{alors} \quad f_1 g_1 \sim_{x_0} f_2 g_2.$$
En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*$, si $f \sim_{x_0} g$ alors $f^\alpha \sim_{x_0} g^\alpha$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur vers [].

Vous avez déjà rencontré tout ceci, de manière implicite, au lycée en étudiant des limites. Voyons cela sur quelques exemples.

**Exemple 5.2.1.** Déterminons la limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 + 2n - 4}{2n^3 - n + 7}$$
Il est plutôt intuitif de se dire que $3n^2$ est le terme plus important au numérateur tandis qu'il s'agit de $2n^3$ au dénominateur. En utilisant les notations introduites dans la définition 5.2.1 nous voyons que
$$2n = o(3n^2) \quad \text{et} \quad -4 = o(3n^2)$$
puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{-4}{3n^2} = 0$. Ainsi $3n^2 + 2n - 4 = 3n^2 + o(3n^2)$ [4]. Tout ceci nous permet de montrer que
$$\frac{3n^2 + 2n - 4}{2n^3 - n + 7} = \frac{3n^2 + o(3n^2)}{2n^3 + o(2n^3)} \sim_{+\infty} \frac{3n^2}{2n^3} = \frac{3}{2n}.$$
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+2n-4}{2n^3-n+7} = 0$.

*Remarque.* Il convient au lecteur d'avoir à l'esprit la valeur des limites des fonctions usuelles afin d'être capable de déterminer quelles parties d'une fonction dominent lorsque $x \to x_0$.

Les nouvelles notations introduites vont nous permettre de faciliter l'exposition des idées qui vont suivre.

3. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer $C = \max(C_1; C_2)$ et $V = V_1 \cap V_2$ où $C_i$ et $V_i$ sont obtenues à partir de la relation $f_i = O_{x_0}(g)$ pour $i = 1, 2$.
4. Ici, nous avons utilisé que $o(3n^2) + o(3n^2) = o(3n^2)$

## 5.3 Dérivée et études de variations

Voici la définition de la dérivée que le lecteur aura rencontré durant sa scolarité.

**Définition 5.3.1.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Nous dirons que $f$ est dérivable en $x_0 \in I$ lorsque la limite suivante existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{5.3.1}$$

*Lorsque c'est le cas nous noterons cette limite $f'(x_0)$, il s'agit du nombre dérivée de la fonction $f$ en $x_0$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de $f$, elle est définie là où $f$ est dérivable.*

*Remarque.* Finalement la définition précédente peut se reformuler à l'aide des notations de Landau 5.2.1 :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1)\\ &\Longleftrightarrow \quad f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)\end{aligned}$$

avec $h \to 0$. Autrement dit, en posant $x = x_0 + h$, cela dit essentiellement que

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)h \tag{5.3.2}$$

dès lors que $x$ se trouve à proximité de $x_0$ (i.e. lorsque $h$ est proche de 0).

Voyons ce que nous permet d'exprimer (5.3.2) vis-à-vis de la relation entre un extremum de $f$ et sa dérivée. A cet effet, rappelons la définition d'un extremum local.

**Définition 5.3.2.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Nous dirons que $f$ admet un maximum local en $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}(x_0)$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V}(x_0)$,*

$$f(x) \leq f(x_0). \tag{5.3.3}$$

*Nous définissons de manière analogue la notion de minimum local en changeant le sens de la précédente inégalité.*

*Remarque.* Nous dirons qu'un point $x_0$ est un maximum global si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$ ce qui est beaucoup plus contraignant puisque (5.3.3) doit être valable pour tout $x \in I$ et pas seulement dans un voisinage de $x_0$. Cette observation est aussi valable pour la notion de minimum global.

Si $x_0$ est un extremum local, cela à des conséquences sur $f'(x_0)$. C'est le contenu du théorème suivant.

**Théorème 27** (Fermat)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I = ]a; b[$. Si $f$ est dérivable en $x_0 \in I$ et admet un maximum local en $x_0$ alors $f'(x_0) = 0$.*

*Remarque.* La réciproque de ce résultat est fausse. Le lecteur pourra considérer, par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 qui n'est pas un extremum.

Il est utile de chercher à démontrer ce résultat à l'aide des approximations

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) \quad \text{et} \quad f(x_0-h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$$

En outre, si $f(x_0)$ est un maximum local alors nous avons, pour tout $h > 0$,

$$f(x_0-h) \leq f(x_0) \quad \text{et} \quad f(x_0) \geq f(x_0+h).$$

Observons ce qui se produit dans le membre de droite en utilisant l'approximation donnée par la dérivée. Nous avons

$$f(x_0) \geq f(x_0) + hf'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad 0 \geq f'(x_0).$$

De la même manière, nous trouvons

$$f(x_0) - hf'(x_0) \leq f(x_0) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq f'(x_0).$$

Donc $f'(x_0) = 0$. Il ne reste plus qu'à mettre cette idée en oeuvre de manière rigoureuse.

*Démonstration.* Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathcal{V}(x_0) = ]x_0-\alpha; x_0+\alpha[ \subset ]a; b[$ soit un voisinage ouvert de $x_0$ sur lequel $f(x_0)$ est un maximum local. En conséquence, nous avons

$$\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad x_0 - \alpha < t < x_0.$$

D'où, lorsque $t \to x_0$, nous en déduisons que $f'(x_0) \geq 0$. De même, si $x_0 < t < x_0 + \alpha$, nous en déduisons que

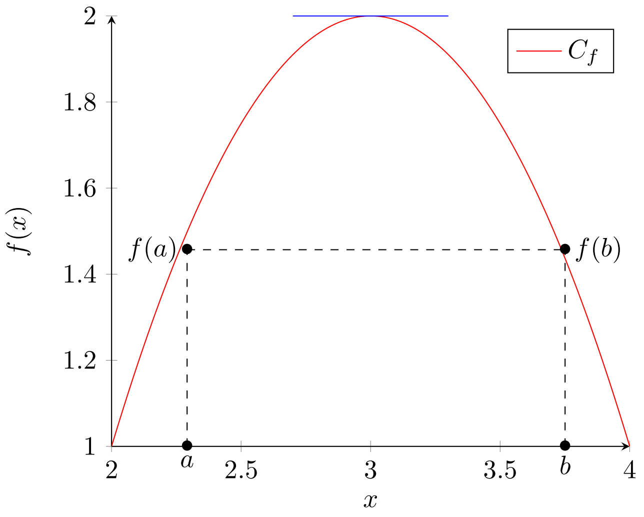
$$\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leq 0.$$

Par suite, lorsque $t \to x_0$, $f'(x_0) \leq 0$ d'où le résultat. □

### 5.3.1 Théorème de Rolle

Le théorème de Fermat 27 semble anodin, pourtant il a de nombreuses conséquences. Imaginons que nous ayons à disposition une fonction $f$ suffisamment régulière, définie sur un intervalle ouvert $I$, et supposons qu'elle passe deux fois (en deux points distincts de $I$) par la même valeur. Un simple dessin de ceci nous suggère que cette fonction admet au moins un maximum local ou un minimum local. D'après ce qui précède, le théorème de Fermat 27 nous assure que la dérivée de la fonction $f$ doit forcément s'annuler (au moins 1 fois) entre ces deux valeurs.

La figure ci-dessous illustre ce qui peut se produire dans le cas d'un maximum local. Le lecteur doit avoir à l'esprit qu'il est envisageable d'avoir, par exemple, deux maximum locaux entre $a$ et $b$ (impliquant alors que la dérivée s'annule deux fois). Cependant, localement, la courbe aura plus au moins l'allure de la courbe dessinée ci-dessous




Voyons comment établir le résultat précédent de manière rigoureuse.

**Théorème 28** (Rolle)**.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

*Remarque.* En général, la valeur de $c$ n'est pas connue.

*Démonstration.* Comme nous allons le voir, l'objectif est de montrer que $f$ admet un maximum local afin d'appliquer le théorème de Fermat 24.

Si $f$ est une fonction constante alors le résultat est trivial. Sinon, il existe $x_0 \in ]a;b[$ tel que, par exemple, $f(x_0) > f(a)$ (le cas $f(x_0) < f(a)$ se traite de manière similaire). De plus, $f$ étant continue sur l'intervalle $[a,b]$ il existe $c \in [a,b]$ (cf. théorème 24) tel que

$$f(c) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

En particulier, $f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$. Autrement dit, $c \in ]a,b[$ et $f(c)$ est un maximum (global). Le théorème 27 implique donc que $f'(c) = 0$ ce qui est le résultat. □

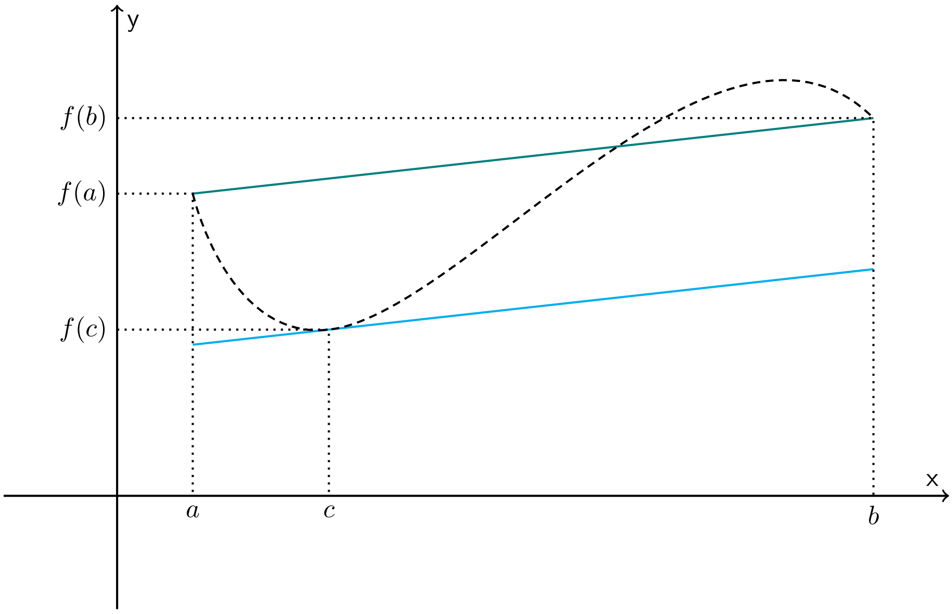
### 5.3.2 Théorème des accroissements finis

Voyons dès à présent une première conséquence du théorème de Rolle. Il s'agit d'un premier pas vers l'étude des variations d'une fonction grâce à sa dérivée.

**Théorème 29** (Accroissements finis)**.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{5.3.4}$$

*Remarque.* Le théorème nous assure que le coefficient directeur de la droite passant par $f(a)$ et $f(b)$ coïncide avec la celui de la tangente à la courbe en un certain point $c \in ]a, b[$ ; en conséquence, ces droites sont parallèles.




L'équation (5.3.4) est un moyen de comparer $f(a)$ avec $f(b)$ grâce au signe de $f'(c)$. Autrement dit, nous avons un moyen d'étudier les variations d'une fonction à partir du signe du coefficient directeur de ses tangentes (i.e. le nombre dérivée). Graphiquement, cela revient à envelopper une courbe suffisamment régulière par ses tangentes lesquelles nous indiqueront ensuite (suivant le signe du coefficient directeur) si la fonction est croissante ou décroissante. D'une certaine manière, l'étude des variations d'une fonction dérivable devient aussi simple que l'étude des variations d'une fonction affine.

Enfin, comme annoncé dans (4.4.3), c'est le théorème des accroissements finis qui permet de faire un lien entre dérivée et fonction contractante (et plus généralement lipschitizienne). En effet, si $f'$ est uniformément bornée par $k > 0$ sur $[a, b]$ alors d'après (5.3.4)

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

*Démonstration.* Pour démontrer le théorème de accroissements finis, l'idée est de construire une fonction dérivable $H$ telle que $H(a) = H(b)$ et

$$H'(c) = 0 \quad \text{pour un certain} \quad c \in ]a, b[ \quad \iff \quad (5.3.4)$$

Ce procédé sera utilisé à de nombreuses reprises. Posons alors $H(x) = f(x) - A(x - a)$ avec $A$ une constante (à déterminer) telle que $H(a) = H(b)$. Il est très simple de vérifier que $H$ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle 28, il existe alors $c \in ]a, b[$ tel que

$$H'(c) = 0 \quad \iff \quad f'(c) = A.$$

Il convient donc de choisir $A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ afin de conclure. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $H(a) = H(b)$ pour un tel choix de $A$. □

Il se trouve qu'il est possible de généraliser le théorème des accroissements finis en adaptant la démonstration.

**Théorème 30** (Théorème des accroissements finis généralisé)**.** *Soient $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$\big[f(b) - f(a)\big]g'(c) = f'(c)\big[g(b) - g(a)\big].$$

*En particulier, si $g(x) = x$ nous retrouvons l'égalité* (5.3.4).

*Démonstration.* La démonstration sera donnée en exercice. □

Comme annoncé auparavant, le théorème des accroissements finis nous permet de relier un accroissement d'une fonction avec sa dérivée. C'est précisément ce dont nous avons besoin pour démontrer ce qui a été constamment utilisé au lycée depuis la classe de 1ère.

**Théorème 31** (Variations d'une fonction)**.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

- *si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in ]a,b[$ alors $f$ est croissante sur $[a,b]$.*
- *si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in ]a,b[$ alors $f$ est décroissante sur $[a,b]$.*
- *si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in ]a,b[$ alors $f$ est constante sur $[a,b]$.*

*Démonstration.* Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que $x_1 < x_2$. Le théorème 29 entraine que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

et la conclusion s'ensuit en utilisant l'hypothèse sur $f'$. □

Pour résumé, nous venons de voir qu'en **comparant $f$ avec une fonction affine** (pour laquelle le coefficient directeur est donné par $f'$), nous pouvions en déduire les **variations de la fonction** $f$ au voisinage de $x_0$ :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

et ceci nous a permis d'obtenir des informations sur les variations de $f$ au voisinage de $x_0$. Le lecteur aura sans doute remarquer que l'application $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est polynôme de degré 1 (en la variable $x$). Il semble alors naturel de se poser la question suivante :

**Est-il possible d'approcher $f$, au voisinage d'un point, par un polynôme de degré supérieur ou égale à 2 ? Si oui, quelles informations cela va-t-il nous fournir sur le comportement de la fonction $f$ ?**

En particulier, comment pourrions-nous établir la nature d'un extremum ? Pour cela, il va être nécessaire d'approfondir notre étude en comparant $f$ à des fonctions polynomiales plus élaborées. Tout ceci va être développé dans la section suivante.

Avant cela, voyons une dernière conséquence du théorème de Rolle (via le théorème des accroissements finis 29) permettant d'établir des limites en utilisant la fonction dérivée.

### 5.3.3 Calcul de limites et règle de l'Hospital

Il se trouve qu'il est possible, lors d'un calcul de limite, d'utiliser les dérivées pour lever certaines formes indéterminées .

**Exemple 5.3.1.** Comment déterminer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = ?$$

Voici résultat permettant de répondre à cette question.

**Proposition 32** (Règle de l'Hospital)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}$ ainsi que $a \in \mathbb{R}$. Supposons que*

$$f(a) = g(a) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = l \in \mathbb{R}$$

*alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

*Démonstration.* La démonstration sera proposée en exercice. Des versions plus avancées de ce résultat seront également exposées. □

*Remarque.* Le théorème précédent permet facilement de répondre à la question introduite plus haut :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

La règle de l'Hospital sera très utile lorsque nous aborderons la question des développements limités afin d'approcher une fonction suffisamment dérivable par un polynôme.

## 5.4 Formule de Taylor-Young : étude locale

Comme annoncé, cette section a pour objectif de comparer (localement) une fonction donnée avec un polynôme d'un certain degré afin d'obtenir de nouvelles informations sur la fonction $f$ (ses extremums par exemple). Essayons de motiver cette étude et l'introduction d'outils supplémentaires.

Etant donné une fonction dérivable $f$, nous savons déjà, grâce au théorème 27 que si $x_0$ est un extremum local alors $f'(x_0) = 0$. En particulier, au voisinage de $x_0$, l 'approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

ne nous apporte plus d'information. Il est nécessaire d'affiner notre approximation (en précisant le contenu du reste $o(x - x_0)$ que nous avons omis ci-dessus). Voici un exemple de ceci.

**Exemple 5.4.1.** Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

1. Si nous procédons à une étude comme si nous étions encore au lycée, nous dirions, après quelques calculs, que $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ et l'étude du signe de la dérivée combinée à un tableau de variations nous assurerait que $f(1) = 8$ est un maximum local.

2. Essayons de démontrer ceci avec les idées développées plus tôt. Tout d'abord, comment se comporte $f$ à proximité de 1 ? Dans cette optique, étudions, pour tout $h \in \mathbb{R}$ (supposé suffisamment petit), $f(1+h)$. Nous trouvons alors

$$f(1+h) = h^3 - 3h^2 + 0h + 8 \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, en posant $x = 1+h$, nous avons montré que

$$f(x) = 8 + 0 \times (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \text{ [5]}.$$

En outre, si $x$ est proche de 1, le terme $(x-1)^3$ devient négligeable face aux autres. Ceci signifie qu'au voisinage de 1, nous avons l'approximation suivante

$$f(x) \approx 8 - 3(x-1)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \approx f(1) - 3(x-1)^2.$$

En conséquence,

$$f(x) - f(1) \approx -3(x-1)^2 \leq 0$$

donc[6] $f(x) - f(1) \leq 0 \iff f(x) \leq f(1)$. En d'autres termes, $f(1)$ est un maximum local.

*Remarque.* 1. L'idée développée ci-dessous, ressemble fortement au procédé de forme canonique qui s'emploie sur les polynômes de degré 2 afin d'étudier leur variations. Par exemple, si $f(x) = -x^2 + 2x + 7$ alors sa forme canonique est

$$f(x) = -(x-1)^2 + 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = -(x-1)^2 + f(1).$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f(1) \leq -(x-1)^2 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(1).$$

Soulignons tout de même que le calcul précédent fourni un résultat global par opposition à ce qui a été obtenu localement dans l'exemple précédent (cette différence provient de la présence des termes négligeables).

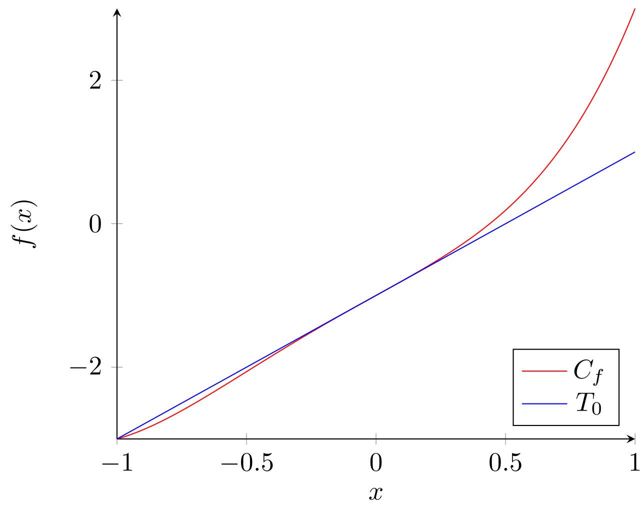
L'exemple précédent nous montre que l'approximation, locale, d'une fonction par un polynôme de degré 2 permet de déterminer la nature d'un point critique (là où $f'(x) = 0$). Nous pourrions poursuivre notre raisonnement en cherchant à approcher localement $f$ par des polynômes de degrés plus élevé encore. Cela permet notamment de détecter les points d'inflexion de la courbe : là où la courbe change de convexité.

**Exemple 5.4.2.** Soit $f(x) = x^4 + x^3 + 2x - 1$. Lorsque $x$ est proche de 0, notre fonction se comporte comme $x^3 + 2x - 1$ et nous observons que l'équation de la tangente $T$ à la courbe en 0 est donnée par $y = 2x - 1$. En conséquence, l'écart entre $C_f$ et $T_0$ est déterminé par

$$f(x) - (2x-1) \approx x^3.$$

Nous en déduisons que, dans voisinage de 0, $C_f$ se trouve au dessus de $T_0$ lorsque $x > 0$ et en dessous sinon.

5. Le coefficient 0 est là seulement pour indiquer que $f'(1) = 0$
6. En considérant que cette approximation est une véritable égalité.




Dans les exemples précédents nous nous sommes focalisés, par facilité, sur des polynômes. Comme nous allons le voir, les procédés d'approximations exposés restent valables dans un contexte plus général à conditions d'imposer une certaines régularité aux fonctions étudiées. Il devient alors nécessaire d'introduire de nouvelles notions ainsi que d'un nouveau vocabulaire pour quantifier la régularité d'une fonction à partir de ses dérivées successives.

**Définition 5.4.1.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $n \in \mathbb{N}_*$ fois dérivable telle que $f^{(n)}$ soit continue sur $[a, b]$. Nous notons l'ensemble de telles fonctions $C^n\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$, il s'agit des fonctions dites* de classe $C^n$ *; l'ensemble $C^0\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$ désigne les fonctions continues sur $[a, b]$.*

*Lorsque $f \in C^n\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous dirons que $f \in C^\infty\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivable. Autrement dit,*

$$\cap_{n\geq 0} C^n\big([a, b]; \mathbb{R}\big) = C^\infty\big([a, b]; \mathbb{R}\big).$$

*Remarque.* Finalement la notion précédente permet de ranger les fonctions suivant un entier $n$ qui caractérise sa régularité. Il est possible (cf. [**?**]) d'affiner ce rangement en introduisons la notion de fonctions höldériennes. Grossièrement, il s'agit de préciser ce qui manque à une fonction de classe $C^n$ pour être de classe $C^{n+1}$.

### 5.4.1 Développements limités

Dans ce qui va suivre $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et $0 \in I$. Nous allons continuer à étudier le comportement local d'une fonction suffisamment régulière. L'idée est de **relier la régularité d'une fonction avec le degré du polynôme utilisé pour l'approcher localement**. Il s'agit de la **notion de développements limités** dont la définition est donnée ci-dessous. Comme nous le verrons ces idées permettent à la fois de **comprendre le comportement de la fonction au voisinage d'un point** mais elles s'avéreront très efficaces pour **déterminer des limites ou produire des encadrements précis** d'une fonction.

**Définition 5.4.2.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Nous dirons que $f$ admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ en $0$ s'il existe $a_0, \ldots, a_n$ des réels tels que, au voisinage de $0$,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n). \tag{5.4.1}$$

*Remarque.* 1. En substituant $x$ par $x - a$ dans (5.4.1), il est possible de définir la notion de développement limité d'ordre $n$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.

2. La définition peut se généraliser au cas $a = \pm\infty$, il faut alors remplacer dans (5.4.1) $x$ par $\frac{1}{x}$ et cela permet d'étudier le comportement asymptotique de la fonction : i.e. son comportement à l'infini. Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x+1}$ admet $y = 1 + 2x$ comme asymptote en $+\infty$. En effet, il suffit d'observer que

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{x+1} \quad \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) - (1 + 2x) = 0.$$

Ce genre de questions sera traité plus précisément en exercice.

Voyons ce qu'il est possible de déduire de cette définition.

**Proposition 33.** *1. Si $f$ admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ en $0$ alors celui-ci est unique.*

*2. Si $f$ admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ en $0$ :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n) \quad \textit{au voisinage de} \quad 0$$

*alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

*(a) $f$ est continue en $0$ et $f(0) = a_0$ ; $f$ est dérivable en $0$ avec $f'(0) = a_1$.*

*(b) si de plus $f$ est paire alors $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 0$.*

*(c) si de plus $f$ est impaire alors $a_{2k} = 0$ pour tout $k \geq 0$.*

*Remarque.* 1. Cette proposition (dont le lecteur pourra trouver une démonstration dans []) donne un premier lien entre la régularité d'une fonction et l'ordre de son développement limité. Il faut toutefois ne pas chercher à généraliser ceci. Par exemple, il est possible de produire des fonctions admettant un développement limité d'ordre 2 en 0

$$\text{i.e.} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

sans que la fonction soit 2 fois dérivable en 0 avec $f''(0) = a_2$. En effet, ceci s'observe sur la fonction

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad ; \quad f(0) = 1.$$

2. En règle général, il **n'est pas possible de dériver un développement limité**. Plus précisément si $f$ est dérivable et admet un développement limité d'ordre $n$ en 0, sans hypothèses supplémentaires, rien n'assure que $f'$ admette un développement limité d'ordre $n - 1$ en 0. Ce phénomène s'observe, par exemple, avec la fonction $f(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. En effet, $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en 0 mais $f'$ n'admet aucune limite en 0 et ne peut donc posséder un développement d'ordre 0 en 0.

3. En pratique, l'étude de la parité d'une fonction permet de gagner du temps dans le calculs des coefficients du développement limité.

Il est maintenant naturel de s'interroger : à quelles conditions une fonction donnée admet développement limité d'ordre $n \geq 1$ en 0 ? Le théorème suivant répond à cette question.

**Théorème 34** (Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Si $f$ est $n$ fois dérivable en $x_0 \in I$ alors, au voisinage de $x_0$, $f$ admet le développement limité suivant :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big). \tag{5.4.2}$$

*Remarque.* 1. Le théorème de **Taylor-Young est un résultat local** et (5.4.2) n'est valable que pour les valeurs de $x$ proches de $x_0$. Ce théorème indique donc qu'au voisinage de $x_0$, $f$ **se comporte comme un polynôme de degré** $n$ (modulo une erreur en $o\big(x - x_0)^n\big)$). Nous verrons plus tard un résultat semblable mais cette fois-ci global (i.e. valable sur tout l'intervalle $I$) : le théorème de Taylor-Lagrange (théorème 40) ; bien entendu ce passage du local au global nécessitera des hypothèses plus contraignantes.

*Démonstration.* La démonstration s'effectue par récurrence sur $n$ et repose sur **l'utilisation de la règle de l'Hospital** (cf. proposition 32). Nous allons proposer une esquisse de la démonstration afin de mettre en évidence les idées essentielles, nous laissons le soin au lecteur de combler les parties manquantes afin de rendre ce qui va suivre parfaitement rigoureux.

Voyons ce qui se produit lorsque $n = 1$. Puisque $f$ est dérivable en $x_0$, nous savons que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

après avoir retranché $f'(x_0)$ et mis les différentes termes au même dénominateurs. Nous avons donc établi sans peine que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{au voisinage de} \quad x_0.$$

Pour traiter le cas $n = 2$, il nous sera nécessaire de faire appel à la règle de l'Hospital (cf. proposition 32). A cet effet, posons

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{et} \quad h(x) = (x - x_0)^2.$$

Observons alors que $g(x_0) = h(x_0) = 0$ et

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \text{et} \quad h'(x) = 2(x - x_0).$$

En conséquence, d'après la proposition 32, nous avons

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

puisque $f$ est deux fois dérivable en $x_0$. Par suite, nous obtenons

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{f''(x_0)}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Autrement dit, au voisinage de $x_0$, nous avons

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big).$$

Le cas général n'est pas plus compliqué[7], il suppose juste d'utiliser $n-1$ fois la règle de l'Hospital avec les fonctions

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \text{et} \quad h(x) = (x - x_0)^n.$$

Il convient alors d'observer[8] que

$$g^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) \quad \text{et} \quad h^{(n-1)}(x) = n!(x - x_0).$$

De plus, $g^{(n-1)}(x_0) = h^{(n-1)}(x_0) = 0$. Nous obtenons ensuite (grâce à la règle de l'Hospital employée $n - 1$ fois) que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{h^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Il suffit ensuite de réécrire la conclusion

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

pour achever la démonstration. □

### 5.4.2 Etude locale des variations d'une fonction

Le théorème 34 nous permet de généraliser ce que nous avons observé dans la section précédente vis-à-vis de l'approximation d'une fonction par des polynômes. En particulier, l'approximation d'une fonction par un polynôme de degré 2 va nous permettre de préciser la nature des extremums d'une fonction. Sans perdre en généralité, quitte à faire des translations, nous pouvons choisir $x_0 = 0$ : cela allégera les notations.

**Proposition 35.** *Soit $f$ une fonction deux fois dérivable en 0 alors*

1. *$y = f(0) + f'(0)x$ est l'équation de la tangente $T_0$ à la courbe $C_f$ en 0 et*
   (a) *si $f''(0) > 0$ alors $C_f$ se trouve au dessus de $T_0$ au voisinage de 0 ;*
   (b) *si $f''(0) < 0$ alors $C_f$ se trouve en dessous de $T_0$ au voisinage de 0.*
2. *De plus, si 0 est un point critique de $f$*[9] *alors*
   (a) *lorsque $f''(0) > 0$, $f(0)$ est un minimum ;*
   (b) *lorsque $f''(0) < 0$, $f(0)$ est un maximum.*

7. mais peu agréable à écrire.
8. ce qui nécessite quelques calculs.
9. i.e. $f'(x_0) = 0$.

*Remarque.* Cette proposition généralise à des fonctions quelconques (mais deux fois dérivables) ce que nous avions observé, au tout début du chapitre (cf. exemple 5.4.1), pour des polynômes. Bien entendu, l'étude peut s'affiner en poursuivant le développement limité à un ordre supérieur lorsque la fonction est suffisamment dérivable. Par exemple, si $f$ est trois fois dérivable en 0, $f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) \neq 0$ alors $T_0$ traverse $C_f$ au voisinage de 0.

*Démonstration.* Appliquons une première fois le théorème de Taylor-Young 34 à l'ordre 1 : au voisinage de 0, nous avons

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

D'où, $\lim_{x\to 0} f(x) - \big(f(0) + xf'(0)\big) = 0$ et $y = f(0) + xf'(0)$ est bien l'équation de la tangente $T_0$. Pour préciser le comportement de $f$ au voisinage de 0, il convient d'appliquer de nouveau le théorème de Taylor-Young 34, cette fois-ci à l'ordre 2 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 f''(0) + o(x^2).$$

Autrement dit, la position relative de $T_0$ et $C_f$ est donnée par

$$f(x) - \big(f(0) + xf'(0)\big) = x^2 f''(0) + o(x^2). \tag{5.4.3}$$

Observons d'ailleurs que $x^2 f''(0) + o(x^2) \sim x^2 f''(0)$ lorsque $x \to 0$. Autrement dit,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 f''(0) + o(x^2)}{x^2 f''(0)} = 1.$$

Il existe[10] donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $|x| < \alpha$ nous avons

$$\frac{x^2 f''(0) + o(x^2)}{x^2 f''(0)} > \frac{1}{2}.$$

La conclusion de la première partie s'obtient aisément suivant le signe de $f''(0)$. Par exemple, lorsque $f''(0) > 0$ nous obtenons

$$x^2 f''(0) + o(x^2) > \frac{x^2 f''(0)}{2} > 0 \quad \text{pour tout} \quad |x| < \alpha$$

En conséquence $f(x) - \big(f(0) + xf'(0)\big) > 0$ au voisinage de 0. Autrement dit, $C_f$ se trouve au dessus de $T_0$ au voisinage de 0. Le reste de la proposition s'établi sur le même principe, mutatis mutandis. □

### 5.4.3 Développements limités des fonctions usuelles

Il convient maintenant de dresser la liste des développements limités des fonctions usuelles. Nous verrons ensuite de quelle manière cette liste permet d'obtenir les développements limités d'autres fonctions.

10. Nous utilisons le fait suivant : soit $f$ une fonction $f$ telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = l$, alors pour tout $a < l$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $|x| < \alpha$ nous avons $f(x) > a$. Pour démontrer ceci, il suffit de choisir $\varepsilon = l - a > 0$ dans la définition de la limite d'une fonction en un point.

**Proposition 36** (Formulaire développements limités). *Grâce à la formule de Taylor-Young (5.4.2), nous obtenons les développements limités (d'ordre $n \geq 1$ en $0$) suivant :*

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}). \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad \textit{pour tout} \quad \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

*Remarque.* En particulier, il est important de connaitre le développement limité de $(1+x)^\alpha$ en 0 lorsque $\alpha = -1$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \times 4}x^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6}x^3 + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}x^n + o(x^n).
\end{aligned}$$

En substituant $x$ en $-x$, les deux développements limités précédents permettent d'obtenir ceux de $\frac{1}{1-x}$ et $\sqrt{1-x}$.

Puisque les fonctions étudiées sont souvent obtenues à partir de sommes, produits, compositions ou quotients de fonctions usuelles, il est naturel de s'interroger sur le comportement des développements limités vis-à-vis de ces opérations.

### 5.4.4 Opérations sur les développements limités

A présent, il convient de regarder quelles opérations sont licites avec les développements limités.

**Proposition 37** (Intégration d'un développement limité). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle, qu'au voisinage de $0$, $f'$ admette le développement limité d'ordre $n$*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n + o(x^n)$$

*alors $f$ admet, au voisinage de $0$, le développement limité d'ordre $n+1$ suivant :*

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Voyons un exemple d'utilisation.

**Exemple 5.4.3.** D'après l'exercice 5.10, nous savons que pour $n$ assez grand,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, $(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{1+o(1)}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} e^{1+o(1)} = e.$$

Voyons ce qu'il est possible de faire d'autres avec les développements limités.

**Proposition 38.** *Si $f$ admet un développement limité (en $0$) de la forme*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{avec} \quad P_n \quad \text{un polynôme de degré au plus} \quad n$$

*et si $g$ admet un développement limité (en $0$) de la forme*

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) \quad \text{avec} \quad Q_n \quad \text{un polynôme de degré au plus} \quad n$$

*alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité (d'ordre $n$) de la forme*

$$\lambda R_n(x) + o(x^n)$$

*avec $R_n(x) = \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)$.*

Voyons cela sur un exemple.

**Exemple 5.4.4.** Au voisinage de 0, nous avons $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$. Si $f(x) = e^x + \sin(x)$ alors $f$ admet un développement limité en 0 d'ordre 2 :

$$f(x) = 1 + 2x + o(x^2)$$

les termes impliquant les puissances de 3 ont été ignoré car négligeables devant $x^2$.

Il est possible de faire de même avec le produit et les quotients de développements limités.

**Proposition 39.** *Si $f$ admet un développement limité (en $0$) de la forme*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{avec} \quad P_n \quad \text{un polynôme de degré au plus} \quad n$$

*et si $g$ admet un développement limité (en $0$) de la forme*

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) \quad \text{avec} \quad Q_n \quad \text{un polynôme de degré au plus} \quad n$$

*alors*

1. *la fonction $f \times g$ admet un développement limité (d'ordre $n$) de la forme*

$$\lambda R_n(x) + o(x^n)$$

*avec $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne de $P_n \times Q_n$ par $x^{n+1}$ [11].*

2. *la fonction $\frac{f}{g}$ (à condition que $g(0) \neq 0$) admet un développement limité (d'ordre $n$) de la forme*

$$\lambda R_n(x) + o(x^n)$$

*avec $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne, selon les puissances croissantes de $x$, de $P_n$ par $Q_n$.*

Voyons deux exemples d'utilisation de cette proposition.

11. i.e. $P_n Q_n = R_n + x^{n+1} S_n$ avec $\deg(R_n) \leq n$

**Exemple 5.4.5.** 1. Déterminons le développement limité, en 0, à l'ordre 3 de $x \mapsto e^x \cos(x)$. Pour cela nous utilisons les développements limités de ces deux fonctions l'ordre 3 :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right).$$

En développant ce produit, il convient d'observer que toutes les puissances supérieures à 3 seront intégrées dans un $o(x^3)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) &= 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

2. Déterminons le développement limité, en 0, à l'ordre 4 de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$. Pour cela nous utilisons le développement limité du cosinus l'ordre 4 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Ainsi, $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$ au voisinage de 0. Posons alors $u = u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$. Puisque $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$, nous avons (d'après le formulaire)

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(x^4).$$

Il convient ensuite d'observer que

$$u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad ; \quad u^3 = o(x^4) \quad ; \quad u^4 = o(x^4)$$

donc

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

Enfin, il est aussi possible de faire des compositions de développements limités. Plutôt que d'énoncer une proposition abstraite, voyons ce qui se produit sur un exemple.

**Exemple 5.4.6.** Déterminons le développement limité, en 0, à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln\big(\cos(x)\big)$. Tout d'abord, au voisinage de 0, nous avons

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

Posons à nouveau $u = u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$. Ainsi, nous devons trouver le développement limité de $x \mapsto \ln\big(1 + u(x)\big)$. Il est essentiel que $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$, sans quoi notre raisonnement ne fonctionnerait pas. Utilisons le développement limité de $u \mapsto \ln(1 + u)$ à l'ordre 2 (comme nous allons le voir, il est inutile d'aller jusqu'à l'ordre 4 ici) :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

A présent, pour conclure, il suffit de revenir à la variable $x$ en observant que

$$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \quad ; \quad o(u^2) = o(x^4)$$

Ce qui entraine alors

$$\ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Autrement dit,

$$\ln\big(\cos(x)\big) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Les développements limités permettent d'exprimer localement une fonction sous la forme d'un polynôme. Comme nous allons le voir, cette écriture simplifie considérablement le calcul de limites.

**Calcul de limites avec les développements limités**

Voyons de quelle manière les développements limités permettent de calculer facilement certaines limites. Par exemple, il semble assez délicat de déterminer les limites suivantes à l'aide uniquement des outils d'analyse du lycée.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad ?$$

L'utilisation des développements limités nous facilite grandement la tâche.

**Exemple 5.4.7.** En utilisant la proposition 36, nous obtenons que pour tout $x \in \mathcal{V}(0)$,

$$\sin(x) = x + o(x).$$

Ainsi, $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x+o(x)}{x} = 1 + o(1)$. Par suite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + o(1) = 1.$$

Ceci permettant de répondre à l'une des questions que nous avions initialement posée. Le lecteur est invité à traiter les exercices, proposés en fin de chapitre, du même genre afin de s'entrainer à manipuler ces nouvelles idées.

## 5.5 Formule de Taylor-Lagrange : étude globale

La théorème de Taylor-Young 34 nous a permis d'étudier précisément le comportement local d'une fonction en supposant uniquement que la fonction était un certain nombre de fois dérivable en 1 point. Que se produit-il si nous renforçons cette hypothèse et supposons cette fois-ci que les hypothèses de dérivabilité portent sur l'intervalle complet plutôt qu'au voisinage de l'un de ses points ?

Il se trouve que des hypothèses plus fortes permettent d'améliorer la connaissance du reste apparaissant lors de l'approximation d'une fonction par un polynôme. Le premier théorème que nous allons présenter peut se voir comme une généralisation du théorème des accroissements finis 29 (lequel correspond au cas $n = 0$ dans (5.5.1)).

**Théorème 40** (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f \in C^n\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ telle que $f^{n+1}$ existe sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in ]a,b[$ telle que l'identité suivante soit vérifiée :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + f^{(n+1)}(c) \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (5.5.1)$$

*Remarque.* Finalement ce résultat nous montre que le reste du développement limité est un $O(x^{n+1})$ [12] Notons de plus que la formule de Taylor-Lagrange (5.5.1) est un **résultat global** (valable sur tout l'intervalle $[a,b]$), en opposition avec la formule de Taylor-Young 5.4.2 qui est locale (valable au voisinage d'un point). Il est fréquent que la formule de Taylor-Lagrange 5.5.1 soit utilisée [13] en choisissant $b = x$ et $a = 0$ :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(\theta x) \times \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5.5.2)$$

pour un certain $\theta \in ]0;1[$. Si $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$, la formule (5.5.2) exprime à nouveau que

$$f(x) = P_n(x) + \text{reste}.$$

Le lecteur curieux doit s'interroger sur ce qui pourrait se produire dans (5.5.2) si $n \to +\infty$ (à condition que cela soit possible). La théorie des séries entières (qui ne sera pas abordée ici) s'attache à étudier ce genre de questions et donnent des résultats très intéressants qui sont souvent essentiels dans certains domaines de mathématiques (notamment dans le cadre de la théorie des fonctions holomorphes, cf. [**?**]).

Mentionnons en passant l'existence d'une autre formule de Taylor, celle dite avec « reste intégral ». Nous y reviendrons dans le chapitre suivant portant sur le calcul intégral et nous ne l'énoncerons pas ici.

*Démonstration.* L'idée est d'obtenir l'égalité (5.5.1) à partir du théorème de Rolle 28. Pour cela, il convient donc de construire (une fois de plus) une fonction $H(x)$ telle que $H(a) = H(b)$ et

$$H'(c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (5.5.1)$$

pour un certain $c \in ]a,b[$ (fournit par l'application du théorème 28). A cet effet, considérons la fonction $H$ définie par

$$H(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $A$ une constante (à déterminer) choisie de sorte que $H(a) = 0$ (nous savons déjà que $H(b) = 0$). Autrement dit, $A$ est choisie telle que

$$H(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) - A\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.\text{[14]} \quad (5.5.3)$$

12. La formule de Taylor-Young (5.4.2) nous affirmait qu'il s'agissait d'un $o(x^n)$.
13. Elle est alors appelée formule de Taylor-MacLaurin.
14. Il n'est pas utile de résoudre explicitement cette équation, une expression plus simple de $A$ sera obtenue quelques lignes plus bas

En utilisant les formules de dérivation d'un produit, il n'est pas difficile de montrer que

$$H'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + A\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Ainsi, le théorème de Rolle (appliqué à $H$) nous fournit l'existence de $c \in ]a, b[$ tel que

$$H'(c) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = f^{(n+1)}(c)$$ [15]

ce qui est la valeur de $A$ que nous choisissons pour définir $H$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier qu'un tel choix satisfait bien les conditions imposées (pour que $H(a) = 0$). Pour conclure, il suffit d'utiliser l'équation (5.5.3) pour obtenir (5.5.1) et achever la démonstration. □

Voyons plusieurs applications du théorème de Taylor-Lagrange 40. Débutons par un premier exemple lié aux variations d'une fonction.

**Proposition 41** (Convexité)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur $[a, b]$. Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $C_f$ se trouve toujours au dessus de ses tangentes.*

*Remarque.* La condition $f''(x) \geq 0$ est suffisante pour assurer que la fonction $f$ est convexe mais elle n'est pas nécessaire. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est convexe alors qu'elle n'est pas dérivable en 0. En fait (et nous y reviendrons), la définition la plus adaptée (ne faisant pas référence à des hypothèses de régularité) est la suivante : $f$ est une fonction convexe sur $I = [a, b]$ si pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tout $x, y \in [a, b]$,

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

*Démonstration.* Appliquons la formule de Taylor-Lagrange (5.5.1) à la fonction $f$ sur $[x_0; x] \subset [a, b]$. Nous obtenons

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$$

pour un certain $c \in ]x_0, x[$. Nous en déduisons alors que

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ce qui est précisément l'affirmation de la proposition puisque $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ est l'équation de la tangente en $x_0$. Ce résultat est notamment une autre manière de caractériser les fonctions convexes dérivables (cf. []). □

Traitons un second exemple qui permet d'obtenir des encadrements précis d'une fonction sous réserve que nous soyons en mesure de contrôler $f^{(n)}(x)$ sur $[a, b]$.

**Exemple 5.5.1.** Soit $x > 0$ et cherchons à obtenir un encadrement de $\cos(x)$ permettant de fournir, par exemple, une valeur approchée de $\cos(1/2)$. Tout d'abord, grâce à la formule de Taylor-Lagrange (5.5.1) (appliquée sur l'intervalle $[0, a]$), nous avons

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\sin(c)$$

15. Lorsque $n = 0$, le théorème 29 nous fournit également cette valeur de $A$.

avec $c \in ]0, x[$. En outre, puisque $|\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\left|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right| \leq \frac{x^5}{5!}.$$

En particulier, si $x = \frac{1}{2}$ nous en déduisons que $1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{14\times 24} = \frac{337}{384}$ est une valeur approchée de $\cos(1/2)$ ; l'erreur commise est de $\frac{1}{3840}$.

Dans le même esprit, nous étudierons en exercice les inégalités de Kolmogorov.

Pour conclure ce chapitre, nous montrer comment l'étude du comportement local d'une fonction permet de préciser la vitesse de convergence d'une suite récurrente. Ceci est à comparer avec ce qui a été fait dans l'exemple 2.4.3, où seule la continuité (via une utilisation implicite du théorème des valeurs servait d'argument [16]) de la fonction avait été utilisé.

### Méthode de Newton

Dans le chapitre 4, nous avions vu qu'il était possible d'approcher les zéros [17] d'une fonction en utilisant un principe de dichotomie. La convergence de cet algorithme était assez lent (il fallait $n$ itérations de l'algorithme pour avoir $n$ décimales exactes) en comparaison de celui correspondant à la méthode de Héron 4.3.2 (lequel utilisait $\sqrt{n}$ itérations pour aboutir au même résultat). Nous allons voir que l'idée, utilisée implicitement dans la méthode du Héron, peut se généraliser à condition que la fonction $f$ mise en jeu soit deux fois dérivables.

Nous supposons que $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ avec $I$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, nous supposons aussi que $a$ est un zéro simple de $f$ (i.e. $f'(a) \neq 0$). L'algorithme que nous allons présenter permet d'obtenir des valeurs approchées de $a$.

L'idée de la méthode de Newton est d'utiliser un développement limité de $f$ au voisinage de $a$ :

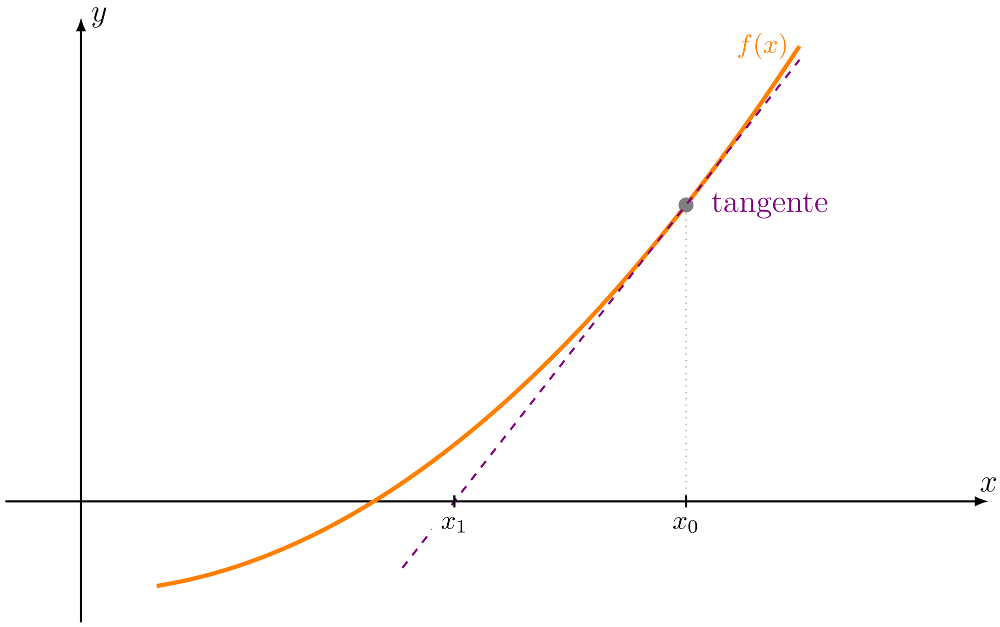
$$f(a) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

avec $x_0 \in I$ quelconque. Ainsi, puisque $f(a) = 0$, nous avons

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

*Remarque.* Graphiquement, cela revient à tracer la tangente $T_0$ à $C_f$ au point $x_0$, pour ensuite déterminer l'abscisse $x_1$ du point d'intersection entre $T$ et l'axe des abscisses pour ensuite recommencer. Plus d'itérations sont faites plus la suite $(x_n)$ obtenue se rapproche de $a$.

16. Cf. exemple 23
17. En particulier, nous avions utilisé ceci pour approcher $\sqrt{2}$ qui est un zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.




Il devient alors naturel d'utiliser l'algorithme suivant : $x_0 \in I$ étant donné, nous posons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Il faut ensuite s'interroger quant à la vitesse de convergence de cet algorithme. Pour cela, nous allons estimer l'écart entre $a$ et la valeur $x_1$ fournie par l'algorithme au bout d'une itération. A cet, effet, il convient d'employer la formule de Taylor-Lagrange (5.5.1) à l'ordre 2. Celle-ci nous assure que

$$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(a - x_0)^2 \quad \text{avec} \quad c \in ]a, x_0[.$$

D'où, puisque $f(a) = 0$,

$$f(x_0) = -f'(x_0)(a - x_0) - \frac{f''(c)}{2}(a - x_0)^2. \tag{5.5.4}$$

Ainsi, en utilisant (5.5.4) dans la deuxième égalité ci-dessous, nous avons

$$\begin{aligned} |x_1 - a| &= \left| x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - a \right| \\ &= \left| \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(a - x_0)^2 \right| \\ &\leq \frac{M_2}{2M_1}|x_0 - a|^2 \end{aligned}$$

où $M_i = \sup_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$ pour $i \in \{1, 2\}$. Une récurrence sur $n$, permet d'en déduire facilement que

$$K|x_n - x| \leq K^{2^n}|x_0 - a|^{2^n} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1,$$

avec $K = \frac{M_2}{2M_1}$. La convergence sera alors quadratique à condition que $|x_0 - a| < \frac{1}{K}$.

Des variations de ceci (par exemple, lorsqu'il n'est pas possible d'évaluer directement $f'$ en un point donné) sont présentées dans [?]. Le lecteur y trouvera également des précisions quant à la méthode de point fixe présentée à la fin du chapitre 4 (cf. 4.4.2). L'utilisation des développements limités permet de mieux comprendre la vitesse de convergence de l'algorithme vers sa limite.

## 5.6 Exercices

*Exercice* 5.1 (Croissances comparées). Démontrer les assertions suivantes.

1. Si $f = O_{x_0}(g)$ alors $f = o_{x_0}(g)$.
2. Si $f = O_{x_0}(g)$ alors $hf = O_{x_0}(hg)$.
3. Reprendre la question précédente en remplaçant $O_{x_0}$ par $o_{x_0}$.
4. Si $f = O_{x_0}(g)$ et $h = O_{x_0}(g)$ alors $f + h = O_{x_0}(g)$.
5. Reprendre la question précédente en remplaçant $O_{x_0}$ par $o_{x_0}$.

*Exercice* 5.2. Démontrer les assertions suivantes.

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.
2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $x^\alpha = o_0(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.
3. Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. $(\ln x)^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha)$.
4. Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. $x^\beta = o_{+\infty}(e^{\alpha x})$.
5. Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. $|\ln x|^\beta = o_{0^+}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

*Exercice* 5.3.

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$. Donner un équivalent de $f$ en $+\infty$.
2. Soit $g(x) = e^{x^2 + \frac{1}{x}}$. Donner un équivalent de $g$ en 0 puis en $+\infty$.

*Exercice* 5.4. Soient $n \in \mathbb{N}_*$ ainsi que $a, b \in \mathbb{R}$ et considérons $P(x) = x^n + ax + b$. Démontrer que $P$ admet au plus 3 racines réelles. *Indication : raisonnement par l'absurde et utiliser le théorème de Rolle.*

*Exercice* 5.5. Démontrer le théorème 30.*Indication : considérer la fonction $H(x) = A\big[g(x) - g(a)\big] - B\big[f(x) - f(a)\big]$ pour des constantes $A, B \in \mathbb{R}$ bien choisies.*

*Exercice* 5.6. Déterminer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x(e^x - 1)}.$$

*Exercice* 5.7. Déterminer les développements limités suivant.

1. $x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$ en 0 à l'ordre 2.
2. $x \mapsto \tan x$ en 0 à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \arctan(x)$ en 0 à l'ordre 3. *Indication :* $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
4. $x \mapsto e^x$ en 5 à l'ordre 3.

*Exercice* 5.8. Déterminer les développements limités suivant.

1. $x \mapsto e^{\sin x}$ en 0 à l'ordre 4.
2. $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ en 0 à l'ordre 4.

*Exercice* 5.9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 et nulle en 0. Soit $l \in \mathbb{N}_*$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{nl} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite. *Indication : faire un développement limité de $f$, en 0 à l'ordre 1.*

*Exercice* 5.10. En utilisant le formulaire 36, démontrer qu'au voisinage de 0,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

En déduire le développement limité, en 0, à l'ordre $n$ de $x \mapsto \ln(1-x)$.

*Exercice* 5.11. Démontrer que la fonction $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ vérifie, au voisinage de 0,

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

*Exercice* 5.12. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{\sin x - x}.$$

*Exercice* 5.13. Démontrer les inégalités suivantes à l'aide du théorème de Taylor-Lagrange.

1. Pour $x >= 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + x^3/3$.
2. Pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
3. Pour $\in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

*Exercice* 5.14. Démontrer la proposition 32 (règle de l'Hospital). *Indication : utiliser le théorème 30.*

*Exercice* 5.15. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe $C^2$. Supposons de plus que $f$ et $f''$ sont bornées et posons

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$$

Le but de cet exercice est de prouver que contrôler $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ à l'aide de $M_0$ et $M_2$. A cet effet fixons $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange (5.5.1) (à l'ordre 2) à $f$ entre $x$ et $x + h$
2. En déduire l'inégalité :
$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
3. En déduire que
$$|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$
4. Maintenant, l'objectif est d'améliorer l'inégalité précédente. Etudier la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$. sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

*Exercice* 5.16. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2) \quad \text{et} \quad f(x) = e^x - 1 \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad f(0) = 1.$$

1. Démontrer que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que $f \in C^1(\mathbb{R}+, \mathbb{R})$. Que vaut $f'(0)$ ?
3. Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ pour tout $x > 0$. En déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)|$.
4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2$.

*Exercice* 5.17. Soit $f$ la fonction définie sur $[1, e]$ par $f(x) = \frac{2x}{\ln(x)+1}$ et $g$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(y) = \frac{2y}{(1+y)^2}$.

1. Démontrer que, pour tout $y \in [0, 1]$, $0 \leq g(y) \leq \frac{1}{2}$.
2. Etudier les variations de $f$ et démontrer que l'intervalle $[1, e]$ est stable par $f$.
3. Démontrer que, pour tous $x, y \in [1, e]$,
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$
*Indication : utiliser le résultat de la première question.*

4. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u\_e| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$
Que peut-on en déduire sur $(u_n)$ ?
5. Déterminer un rang $n$ pour lequel $u_n$ est une approximation de $e$ à $10^{-3}$ près.

*Exercice* 5.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'équation $x + \ln(x) = n$.

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in ]0, +\infty[$.
2. Démontrer que la suite $(x_n)$ est strictement croissante.
3. Démontrer que $(x_n)$ tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que $x_n \sim_{n\to+\infty}$.
5. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)$. *Indication : poser $a_n$ telle que $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$.*
6. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
7. En admettant éventuellement le résultat de la question précédente, dire parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

$\mathbf{a.}x_n \sim_{n\to+\infty} n - \ln(n)$ $\mathbf{b.}x_n \sim_{n\to+\infty} n - 2\ln(n)$ $\mathbf{c.}x_n = n - \ln(n) + o\big(\sqrt{\ln n}\big)$ $\mathbf{d.}x_n = n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n}$.

*Exercice* 5.19. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\sinh\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\tanh(x) < x$.
2. En déduire le tableau de variations de $f$. Les limites seront précisées au bord du domaine de définition.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \frac{\sinh(u)}{u}$.
4. En déduire que $f$ admet au voisinage de $+\infty$ un développement asymptotique de la forme $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, où $a_0, a_1$ et $a_2$ sont des réels à préciser.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, l'équation $f(x) = n + \frac{1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.
6. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
7. Montrer que la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
8. Déterminer un équivalent de $(u_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

## 5.7 Bilan

à compléter

## 5.8 Références historiques

à compléter